

EKONOMIA MATEMATYCZNA

dr Beata Madras-Kobus

**Model matematyczny
Teoria popytu konsumenta**

Zaliczenia na 4,0 i wyżej są równoważne ze zdanym egzaminem z taką samą oceną. Do egzaminu nie są dopuszczone osoby, które nie uzyskały zaliczenia ćwiczeń!

**EGZAMIN - TEST SPRAWDZAJĄCY TEORIĘ
I PROSTE ZAGADNIENIA RACHUNKOWE,
PYTANIA ZAMKNIĘTE I OTWARTE**

Literatura

- Górka J., Orzeszko W., Wata W., Ekonomia matematyczna: materiały do ćwiczeń, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa 2009
- Gruszczyński M., Podgórska M. (red.), Ekonometria, SGH, Warszawa 2004
- **Panek E., Ekonomia matematyczna, AE w Poznaniu, Poznań 2003**
- **Panek E. (red.), Podstawy ekonomii matematycznej. Materiały do ćwiczeń, AE w Poznaniu, Poznań 2002**

Literatura (c.d)

- Tokarski T., Ekonomia matematyczna: modele makroekonomiczne, PWE, Warszawa 2011
- Tokarski T., Ekonomia matematyczna: modele mikroekonomiczne, PWE, Warszawa 2011

PROGRAM PRZEDMIOTU:

- 1. Teoria popytu konsumenta**
- 2. Podstawy teorii produkcji**
- 3. Neoklasyczna teoria przedsiębiorstwa**
- 4. Model Leontiewa**
- 5. Model równowagi ogólnej**

Do opanowania powyższych zagadnień będzie niezbędna wiedza z **MATEMATYKI.**

MODEL MATEMATYCZNY

Model pajęczyny

Podstawowe zagadnienia z ekonomii matematycznej

Ekonomia matematyczna zajmuje się matematycznym opisem zjawisk ekonomicznych. Opis ten nosi nazwę modelu matematycznego.

Model matematyczny: równanie bądź układ równań opisujący zależności między zmiennymi ekonomicznymi.

Składnikami modelu są:

- zmienne,
- parametry.

} tworzące równanie modelu

Przykład modelu matematycznego:

$$P = aK^{\alpha}L^{\beta}$$

P – produkcja,

K – nakłady kapitału,

L – nakłady pracy,

a, α , β – parametry modelu.

Jest to tzw. model deterministyczny.

Przykład modelu ekonometrycznego:

$$P_i = aK_i^\alpha L_i^\beta e^{\varepsilon_i}$$

P_i – produkcja,

K_i – nakłady kapitału,

L_i – nakłady pracy,

a, α, β – parametry modelu,

e – stała matematyczna,

ε_i – składnik losowy modelu.

Rodzaje równań modelu matematycznego:

- **behawioralne**
- **równowagi**
- **definicyjne**

Przykład modelu: *model pajęczyny*

r-nie popytu: $D_t = D(P_t) = \alpha - aP_t$

r-nie podaży: $S_t = S(P_{t-1}) = \beta + bP_{t-1}$

warunek równowagi: $D_t = S_t$

gdzie:

D_t – oznacza wielkość popytu w okresie t ,

S_t – wielkość podaży w okresie t ,

P – cenę w odpowiednim czasie,

natomiast α , β , a oraz b są dodatnimi parametrami modelu.

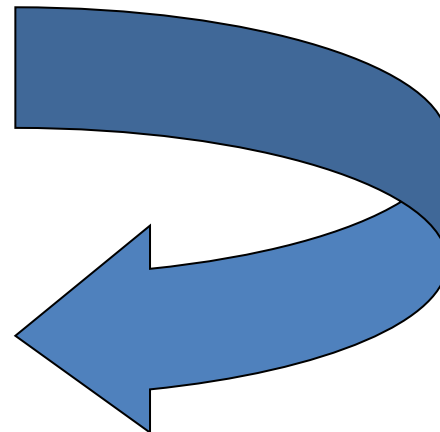
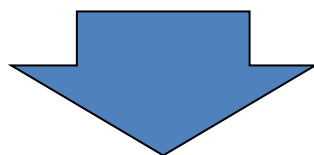
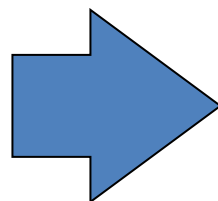
Składniki modelu pajęczyny:

- **zmienne:**
- **parametry:**

Równania modelu pajęczyny:

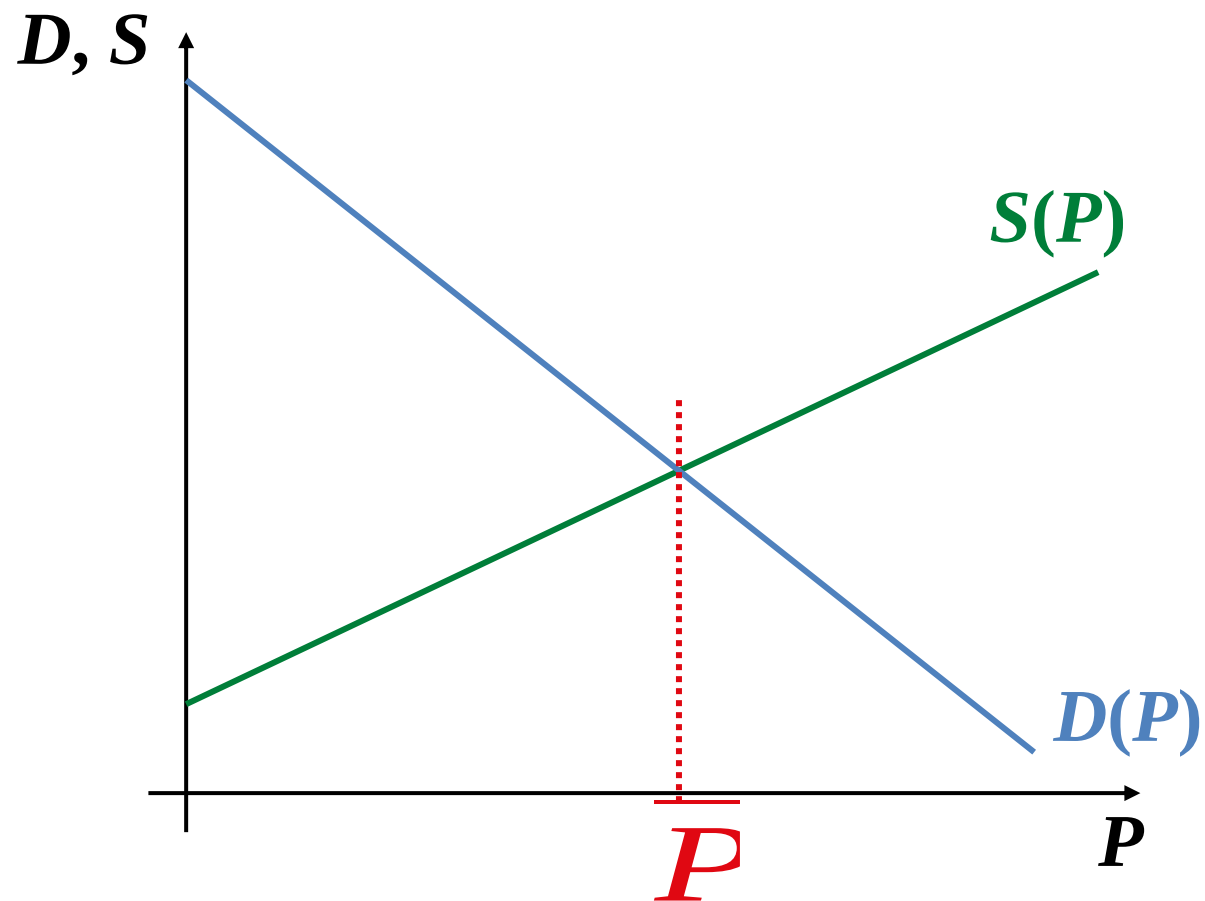
- ✓ **behawioralne:**
- ✓ **równowagi:**

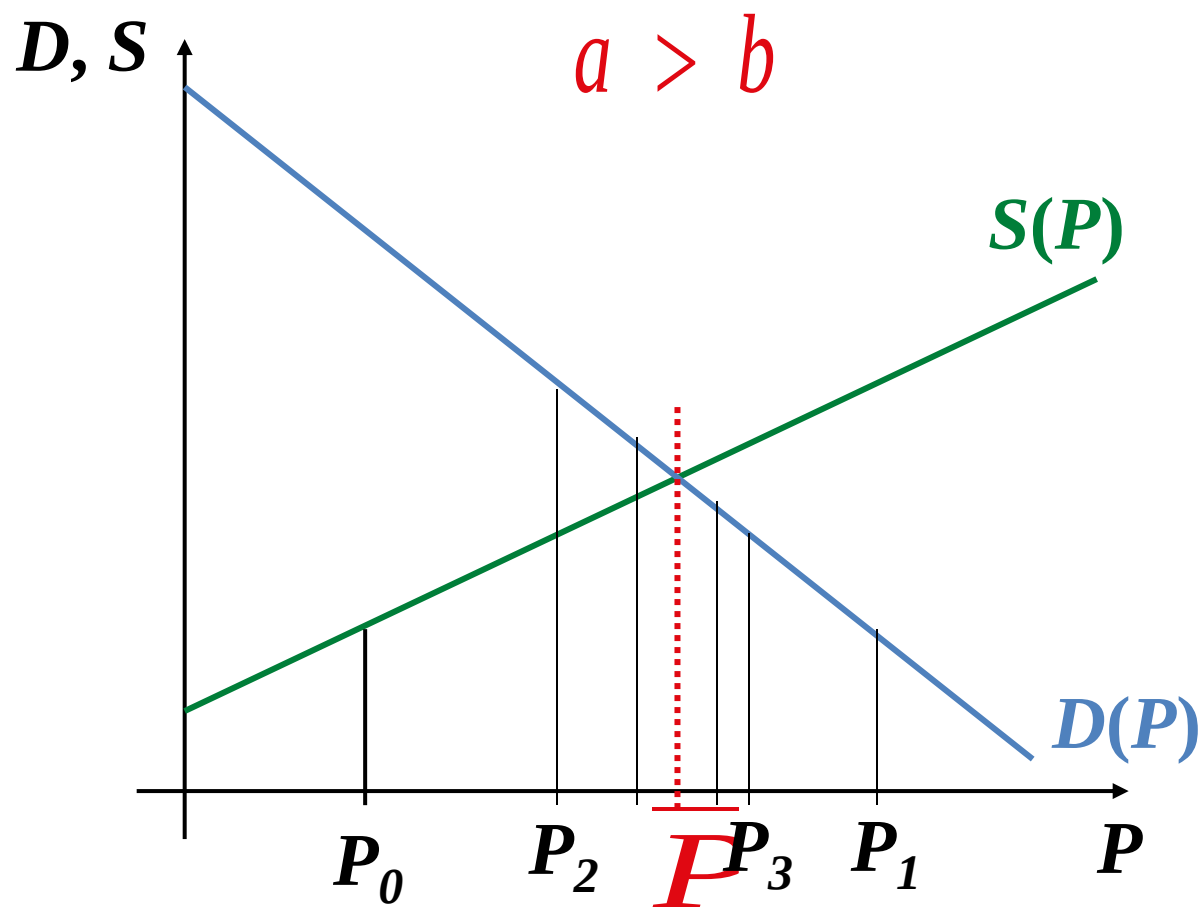
Cena równowagi: $\bigwedge_t P_t = \overline{P}$



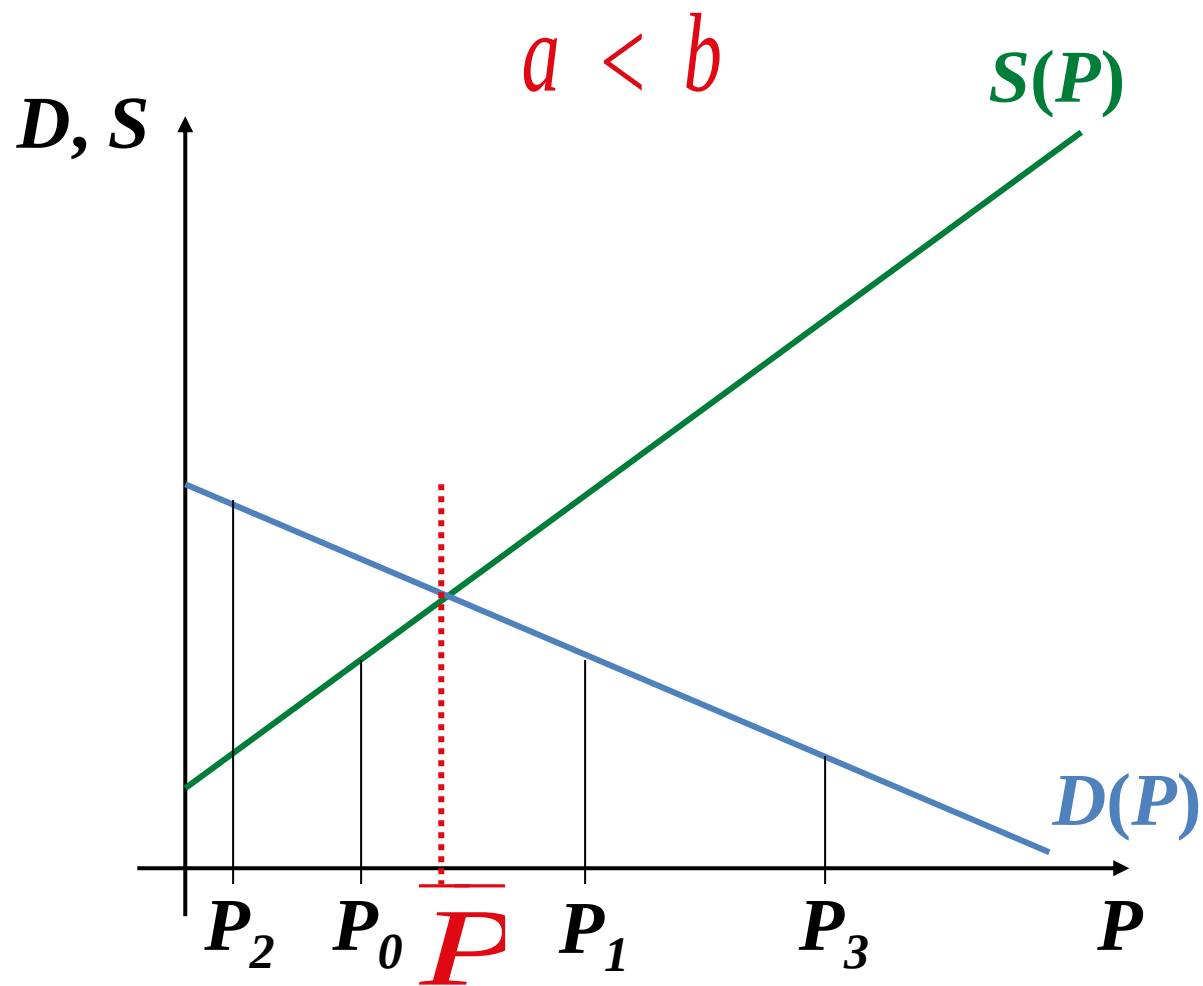
$$\overline{P} = \frac{\alpha - \beta}{a + b}$$

Cena równowagi:

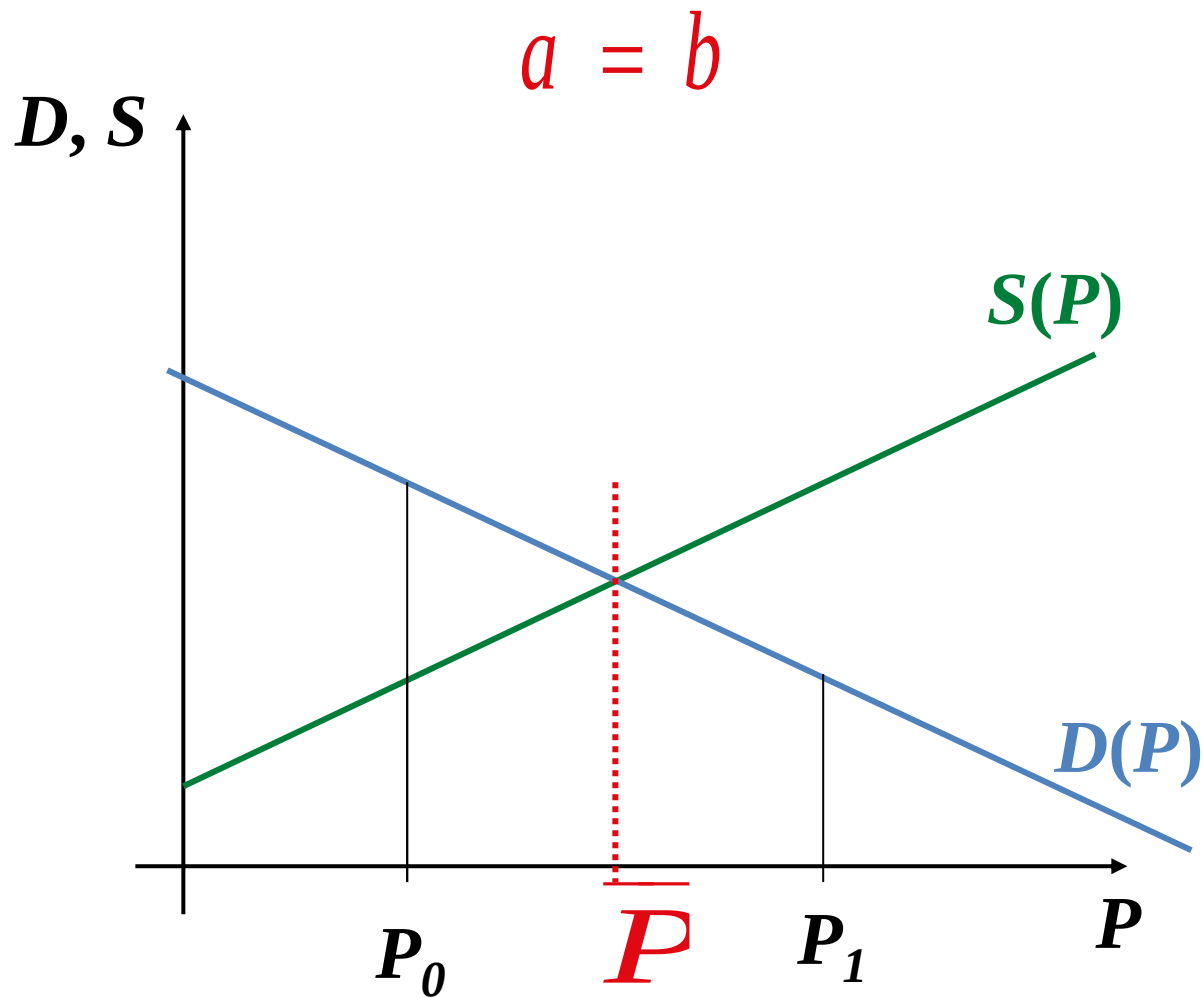




Cena równowagi stabilna –

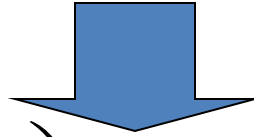


Cena równowagi niestabilna –

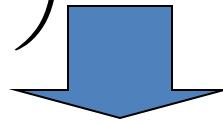


Oscylacja jednostajna

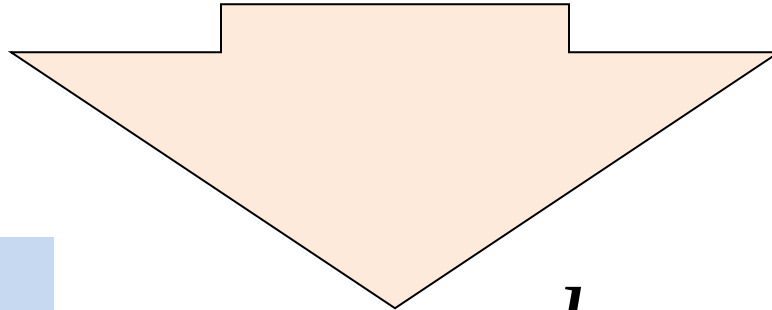
Niech $\bigwedge_t p_t = P_t - \bar{P} \longleftrightarrow \bigwedge_t P_t = p_t + \bar{P}$



$$\alpha - a \left(p_t + \bar{P} \right) = \beta + b \left(p_{t-1} + \bar{P} \right)$$

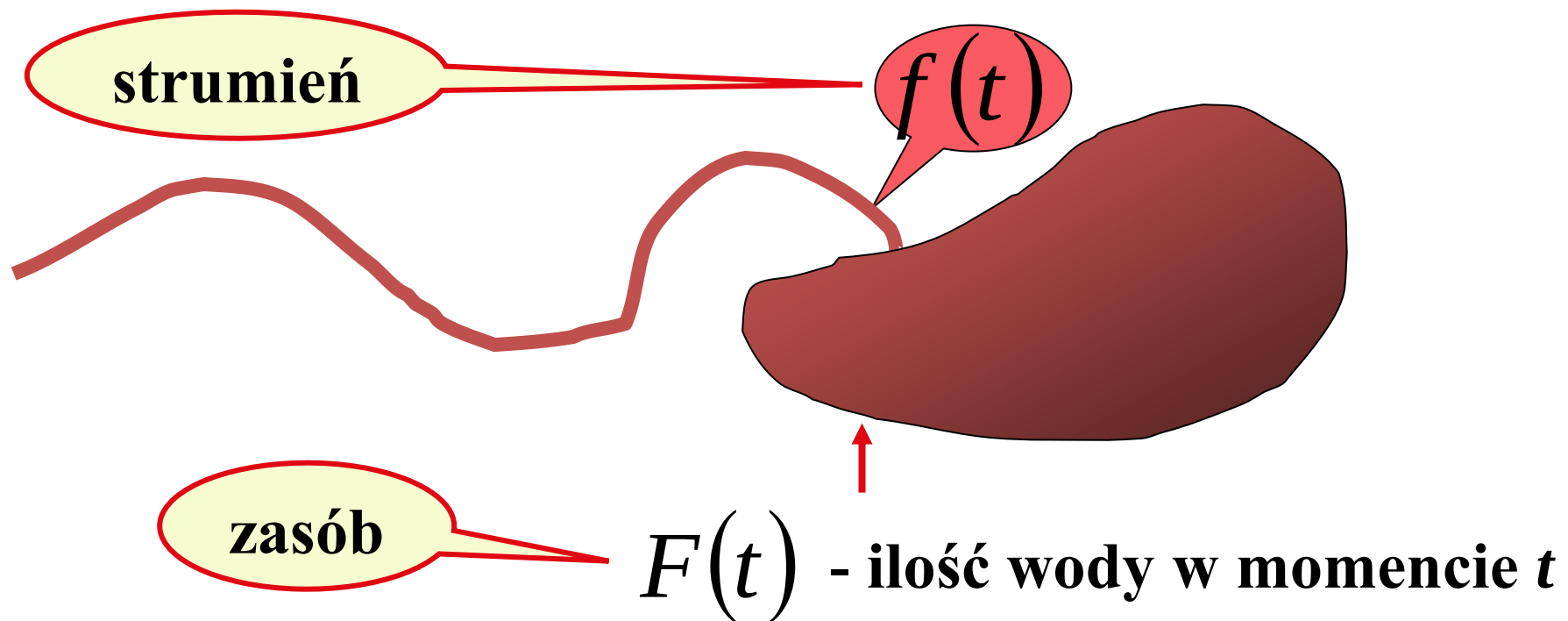


$$\alpha - \beta - ap_t - bp_{t-1} = (a + b)\bar{P}$$



$$p_t = (-1)^t \left(\frac{b}{a} \right)^t p_0 \longleftarrow p_t = -\frac{b}{a} p_{t-1}$$

Zasoby i strumienie



$$F(t + \Delta t) - F(t)$$

**ilość wody, która wpłynęła
w okresie od t do $t + \Delta t$**

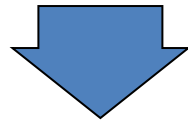
$$\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t}$$

**szybkość wpływu wody w
okresie od t do $t + \Delta t$**

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = f(t)$$

**szybkość wpływu
wody w momencie t**

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = f(t) \quad \text{gęstość przepływu wody w momencie } t$$



ilość wody, która wpłynęła w czasie od t_0 do t_1

$$F(t_1) - F(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(s) ds$$

Przykłady:

strumień inwestycji $I(t)$, zasób kapitału $K(t)$

$$I(t) = \frac{dK(t)}{dt} \qquad K(t_1) - K(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} I(s) ds$$

TEORIA POPYTU KONSUMENTA

Pole preferencji konsumenta

Rozpatrujemy rynek towarów konsumpcyjnych, na którym można kupić n różnych towarów.

Koszykiem towarów nazywamy nieujemny wektor postaci:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

Zbiór dostępnych koszyków $\mathfrak{S} \subseteq R_+^n$ nazywamy **przestrzenią towarów**.

Konsument potrafi porównać dwa dowolne koszyki i stwierdzić, że są one jednakowo dobre lub też, który jest dla niego lepszy, a który gorszy, czyli zna swoją **relację preferencji**.

RELACJA SILNEJ PREFERENCJI

$x \prec y$ oznacza, że koszyk x jest gorszy od koszyka y

inaczej: koszyk y jest silnie preferowany nad koszyk x
koszyk y jest lepszy od koszyka x

RELACJA INDYFERENCJI

$x \sim y$ oznacza, że koszyki x i y są jednakowo dobre (obojętne)

inaczej: koszyki x i y są indyferentne (równoważne)

RELACJA (SŁABEJ) PREFERENCJI

$$x \succsim y \Leftrightarrow x \prec y \vee x \sim y$$

$x \succsim y$ oznacza, że koszyk y jest nie gorszy od koszyka x

inaczej: koszyk y jest słabo preferowany nad koszyk x
koszyk x jest nie lepszy od koszyka y

Własności relacji silnej preferencji:

- przechodniość $\bigwedge_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathfrak{S}} [(\mathbf{x} \prec \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \prec \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \prec \mathbf{z}]$

Własności relacji indyferencji:

- zwrotność $\bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathfrak{S}} [\mathbf{x} \sim \mathbf{x}]$
- symetryczność $\bigwedge_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{S}} (\mathbf{x} \sim \mathbf{y}) \Rightarrow (\mathbf{y} \sim \mathbf{x})$
- przechodniość $\bigwedge_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathfrak{S}} [(\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \sim \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \sim \mathbf{z}]$

Własności relacji (słabej) preferencji:

- zupełność $\bigwedge_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{S}} [\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \vee \mathbf{y} \succsim \mathbf{x}]$
- przechodniość $\bigwedge_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathfrak{S}} [(\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \succsim \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \succsim \mathbf{z}]$

Dla dowolnych dwóch koszyków $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{X}$ zachodzi:

a) $\mathbf{x} \prec \mathbf{y} \vee \mathbf{y} \prec \mathbf{x} \vee \mathbf{x} \sim \mathbf{y}$

b) $\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow [\mathbf{x} \gtrsim \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \gtrsim \mathbf{x}]$

c) $\mathbf{x} \prec \mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x} \gtrsim \mathbf{y} \wedge \neg(\mathbf{y} \gtrsim \mathbf{x}))$

Przestrzeń towarów $\mathfrak{X}$ ($\emptyset \neq \mathfrak{X} \subseteq R_+^n$) ze zdefiniowaną na tej przestrzeni relacją preferencji $\gtrsim$ nazywamy **polem preferencji konsumenta i oznaczamy $(\mathfrak{X}, \gtrsim)$.**

Krzywą (obszarem) obojętności względem danego koszyka $\mathbf{z} \in \mathfrak{Z}$ nazywamy zbiór wszystkich koszyków należących do przestrzeni $\mathfrak{Z}$ indyferentnych z koszykiem $\mathbf{z}$, czyli

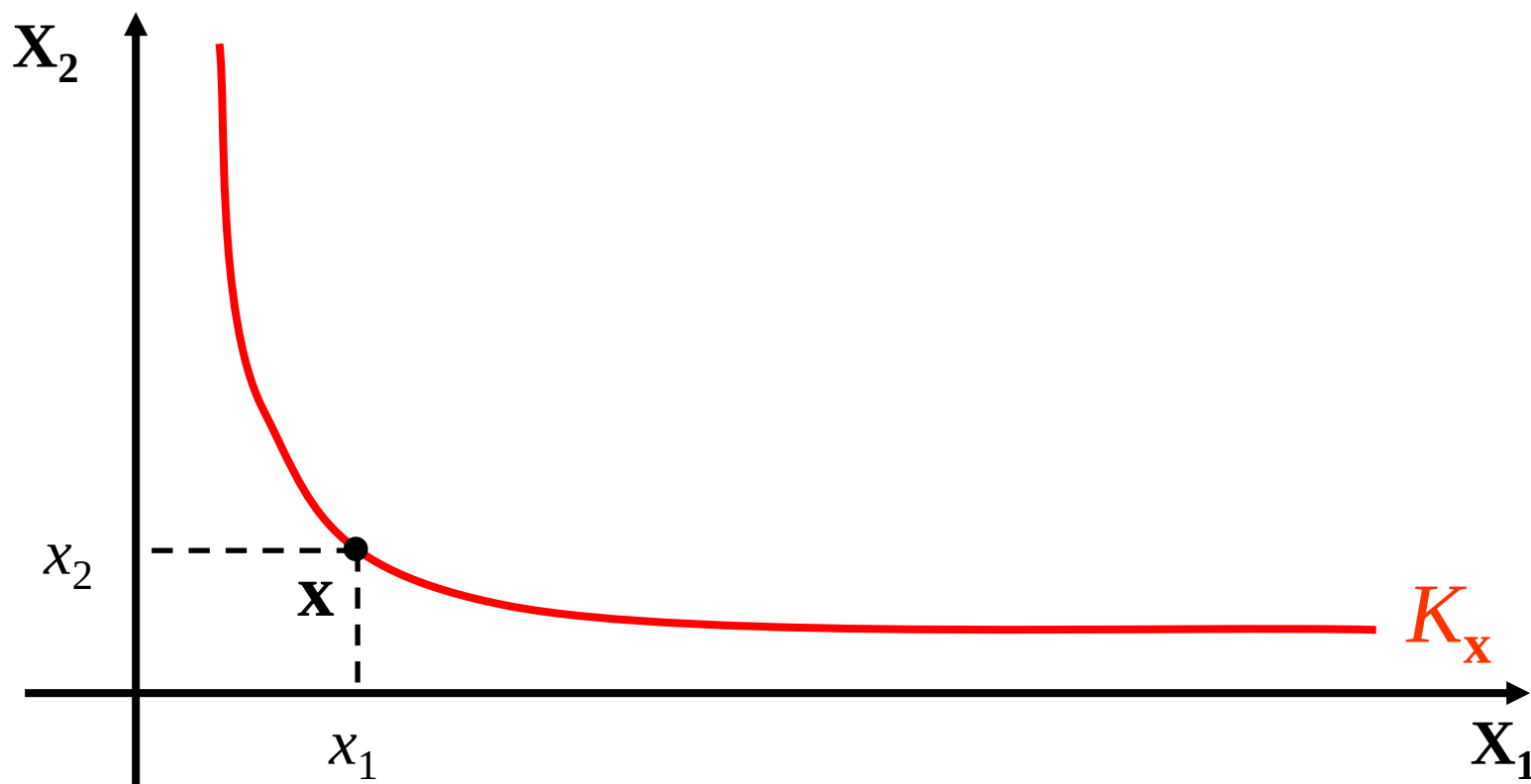
$$K_{\mathbf{z}} = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{Z} : \mathbf{x} \sim \mathbf{z}\}$$

Własności krzywych obojętności:

- 1) $\mathbf{x} \in K_{\mathbf{z}} \Rightarrow K_{\mathbf{z}} = K_{\mathbf{x}}$
- 2) $\mathbf{x} \in \mathfrak{Z} \wedge \mathbf{x} \notin K_{\mathbf{z}} \Rightarrow K_{\mathbf{z}} \cap K_{\mathbf{x}} = \emptyset$
- 3) $\mathbf{x} \in \mathfrak{Z} \wedge \mathbf{x} \notin K_{\mathbf{z}} \Rightarrow \mathbf{z} \prec \mathbf{x} \vee \mathbf{x} \prec \mathbf{z}$

Geometryczna ilustracja relacji preferencji

Rozpatrzmy rynek, na którym handluje się dwoma towarami i załóżmy, że $\mathfrak{I} = R_+^2$.



Przykład

Przedstaw ilustrację geometryczną krzywych obojętności w przypadku, gdy

$$\mathfrak{I} = R_+^2 \quad \text{oraz} \quad \mathbf{x} \precsim \mathbf{y} \Leftrightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2,$$

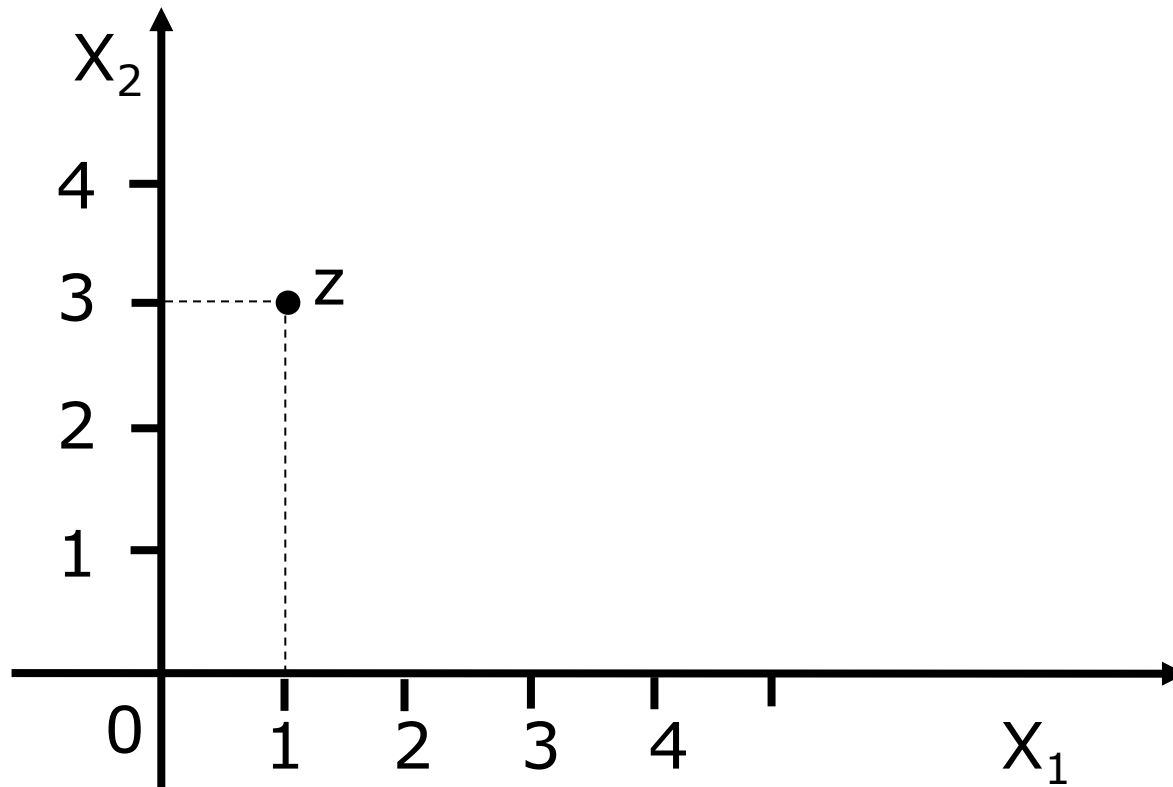
gdzie $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2]$

Wówczas relację indyferencji określamy następująco:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} \precsim \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \precsim \mathbf{x} \Leftrightarrow$$

Niech $\mathbf{z}=[1,3]$

$$K_{\mathbf{z}=[1,3]} = \{\mathbf{x} \in \mathfrak{I} : \mathbf{x} \sim \mathbf{z}\} = \{\mathbf{x} = [x_1, x_2] \in \mathfrak{I} : [x_1, x_2] \sim [1, 3]\}$$

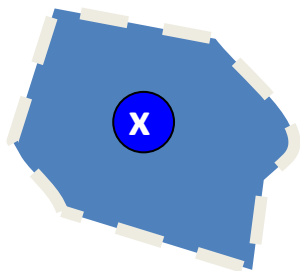


Relacja preferencji jest ciągła na przestrzeni towarów $\mathfrak{X}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych koszyków $a, b \in \mathfrak{X}$ zbiór $\{x \in \mathfrak{X} : x \prec a\}$ wszystkich koszyków gorszych od a oraz zbiór $\{x \in \mathfrak{X} : b \prec x\}$ wszystkich koszyków lepszych od b są zbiorami otwartymi w $\mathfrak{X}$.

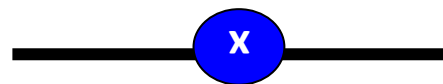
MATEMATYKA

Zbiór A nazywamy zbiorem otwartym, jeśli dla każdego elementu zbioru A istnieje otoczenie tego zbioru.

Żaden punkt brzegowy zbioru otwartego nie jest elementem tego zbioru.



Zbiór otwarty



Zbiór nie jest otwarty

Definicja: Pole preferencji $(\mathfrak{I}, \succsim)$ jest **słabo wypukłe**:

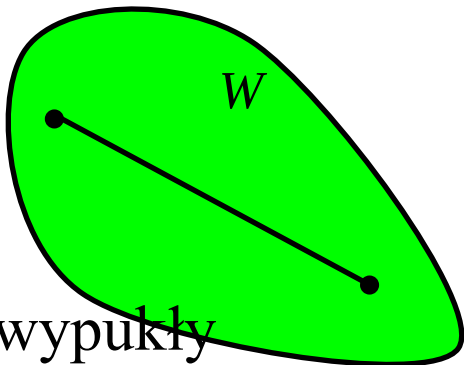
1) przestrzeń towarów $\mathfrak{I}$ jest zbiorem wypukłym;

2) dla dowolnego koszyka $b \in \mathfrak{I}$ zbiór $\Omega(b) = \{x \in \mathfrak{I} : b \succsim x\}$

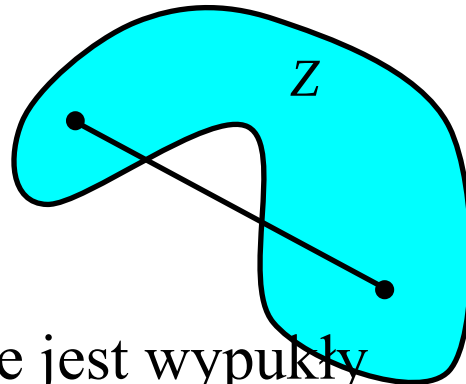
wszystkich koszyków nie gorszych od b jest wypukły.

MATEMATYKA

Zbiór W nazywamy **wypukłym**, jeśli dla dowolnych dwóch punktów należących do zbioru W odcinek łączący te punkty w całości należy do zbioru W .



Zbiór wypukły



Zbiór nie jest wypukły

Odcinkiem łączącym koszyki $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ w przestrzeni R_+^n jest zbiór $\left\{ \mathbf{z} \in R_+^n : \mathbf{z} = \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y} \wedge \alpha \in \langle 0, 1 \rangle \right\}$

Stąd **warunek 2** definicji słabej wypukłości można zastąpić: $\bigwedge_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{S}} \bigwedge_{\alpha \in \langle 0, 1 \rangle} (\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} \succsim \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y})$

Jeśli konsument kierujący się słabo wypukłą relacją preferencji uzna, że koszyk **y jest nie gorszy od koszyka x**, to każdy koszyk z odcinka łączącego $\mathbf{x}$ z $\mathbf{y}$ jest nie gorszy od koszyka $\mathbf{x}$.

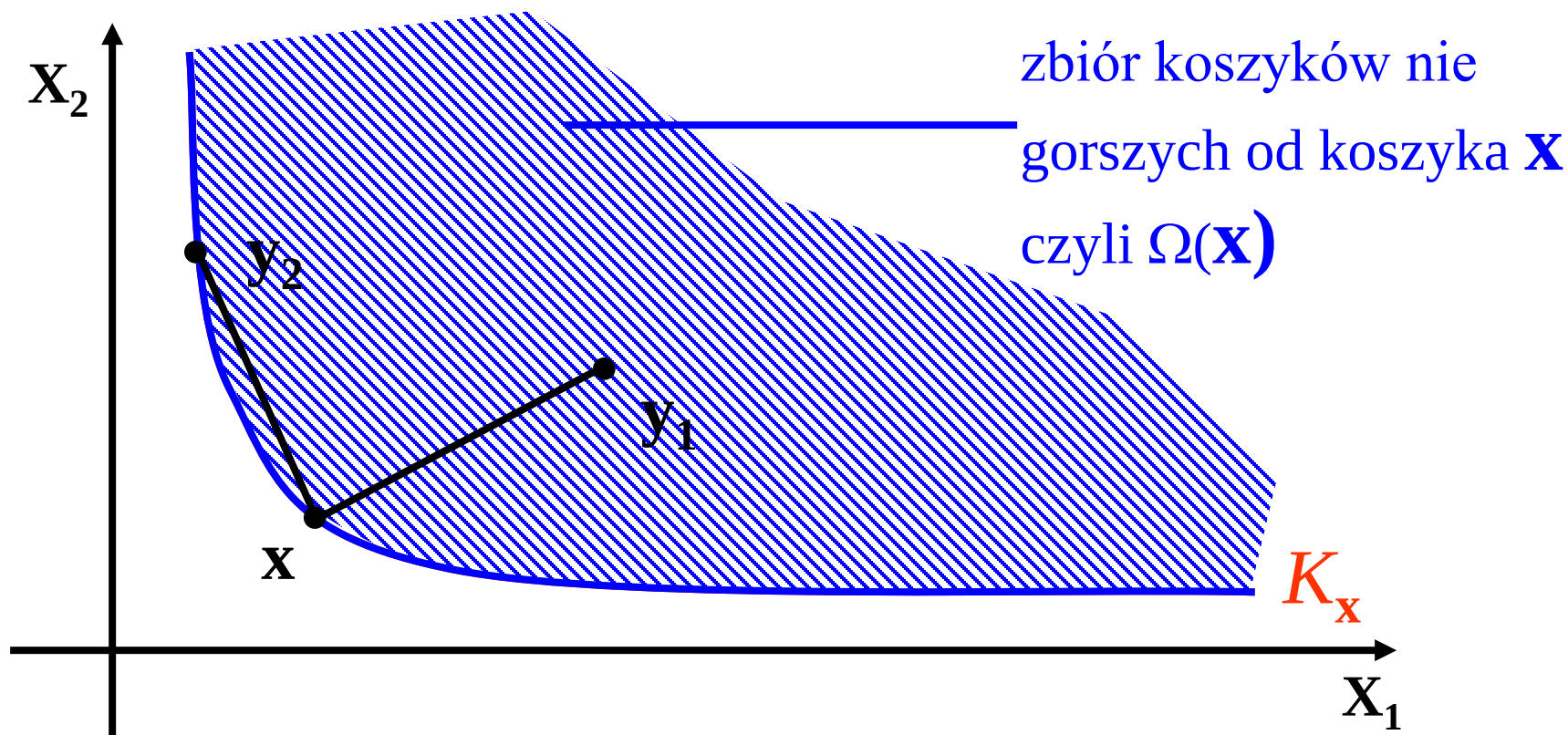
Definicja: Pole preferencji $(\mathfrak{I}, \succsim)$ jest **silnie wypukłe**:

✓ $(\mathfrak{I}, \succsim)$ jest słabo wypukłe

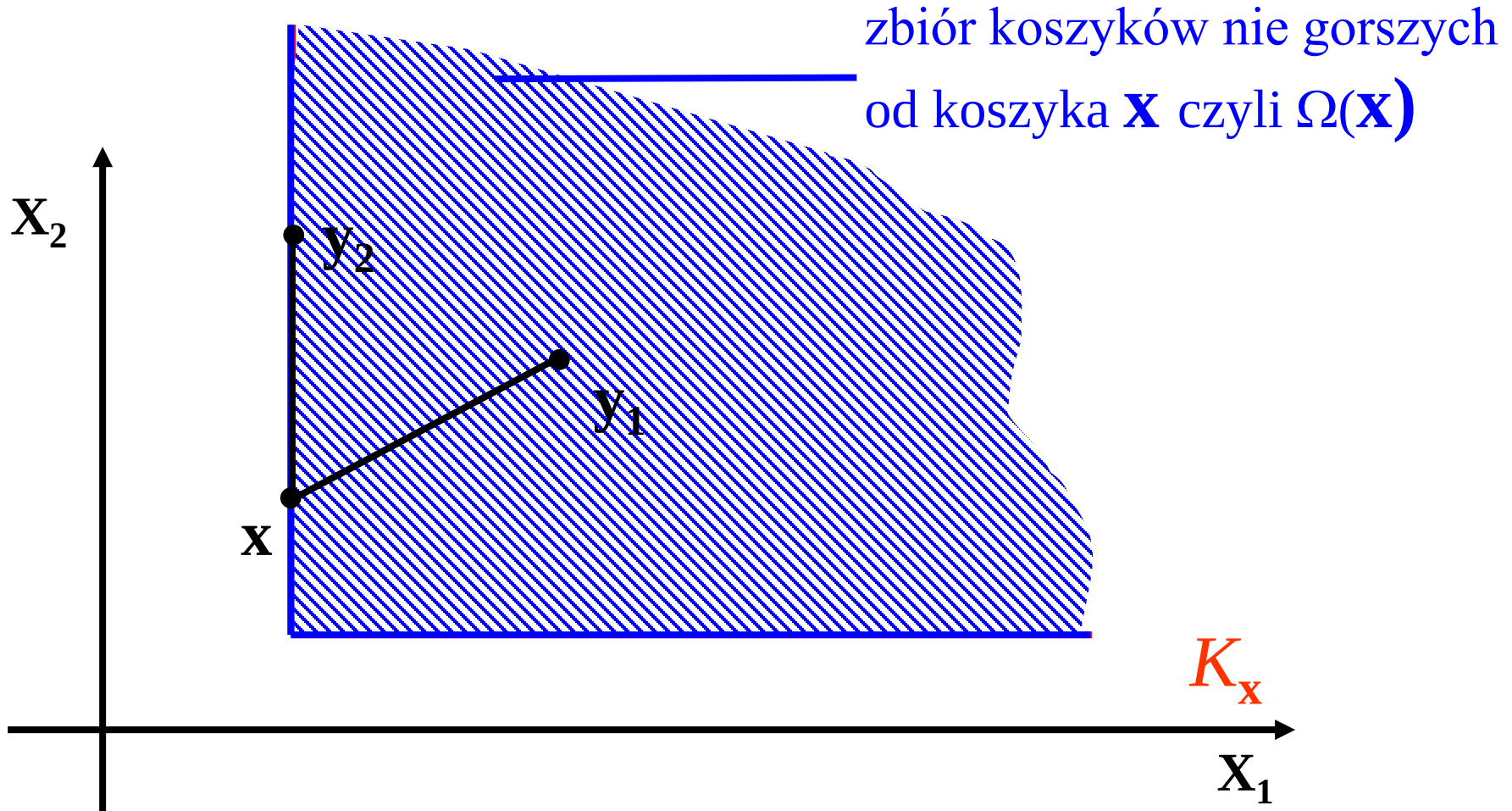
✓ $\bigwedge_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{I}} \bigwedge_{\alpha \in (0,1)} [\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} \prec \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y}]$

Jeśli konsument kierujący się silnie wypukłą relacją preferencji uzna, że koszyk **y jest nie gorszy od koszyka x**, to każdy koszyk z odcinka łączącego x z y (bez końców) jest lepszy od koszyka x.

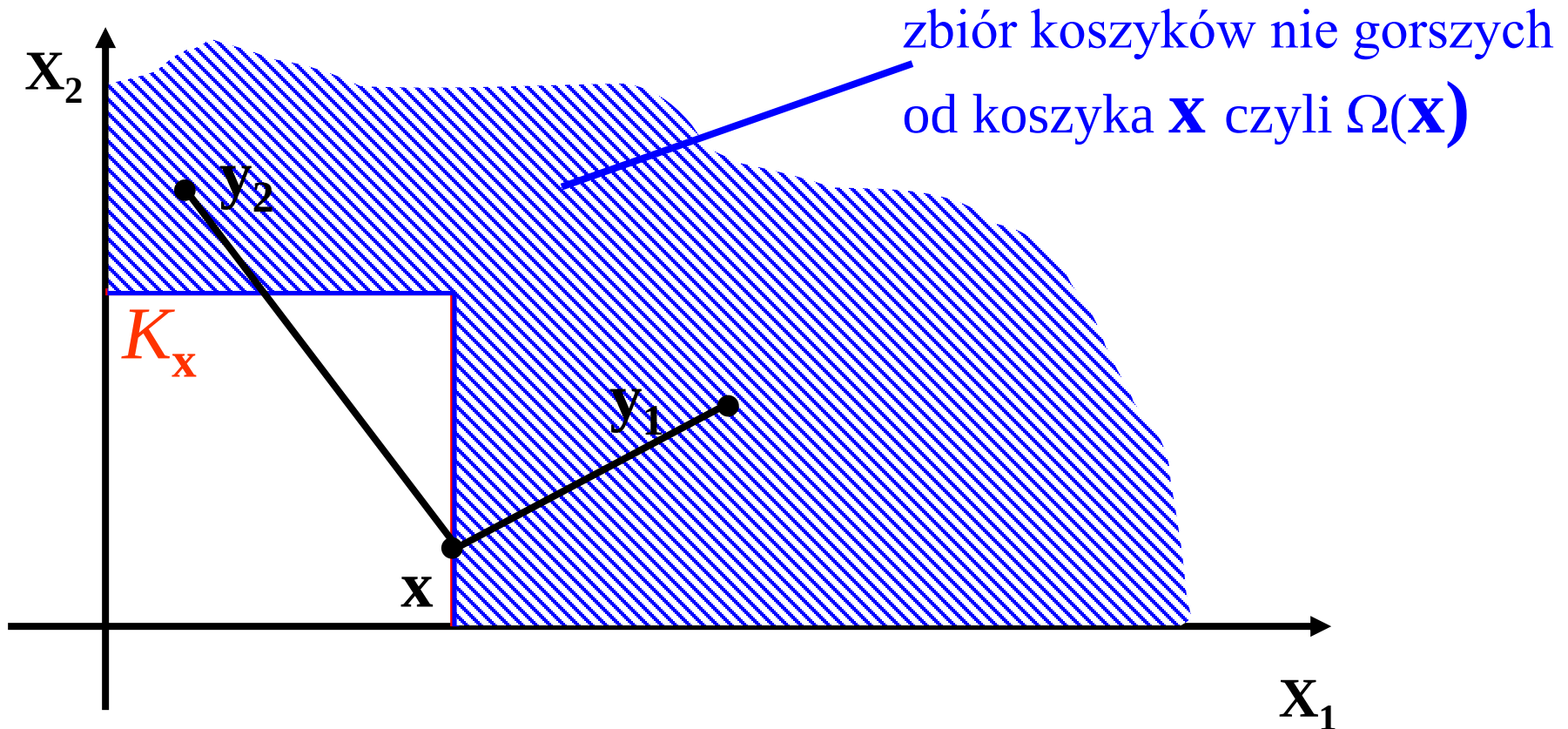
PRZYKŁAD POLA PREFERENCJI SŁABO WYPUKŁEGO, A TAKŻE SILNIE WYPUKŁEGO



PRZYKŁAD POLA PREFERENCJI SŁABO WYPUKŁEGO, ALE NIE SILNIE WYPUKŁE



PRZYKŁAD POLA PREFERENCJI, KTÓRE **NIE JEST** ANI SŁABO WYPUKŁE, ANI SILNIE WYPUKŁE



Koszyk nazywamy optymalnym w zbiorze M , jeśli jest on nie gorszy od każdego innego koszyka z tego zbioru.

Twierdzenie

Niech $(\mathfrak{I}, \succsim)$ oznacza pole preferencji konsumenta i niech $\emptyset \neq M \subseteq \mathfrak{I}$. Wówczas:

- Jeśli relacja preferencji jest ciągła na przestrzeni towarów $\mathfrak{I}$, a M jest zbiorem zwartym (domkniętym i ograniczonym), to w zbiorze M istnieje **przynajmniej jeden optymalny koszyk** towarów, a wszystkie koszyki optymalne tworzą zwarty podzbiór zbioru M .
- Jeśli relacja preferencji jest ciągła i silnie wypukła na przestrzeni towarów $\mathfrak{I}$, a M jest zbiorem zwartym (domkniętym i ograniczonym) i wypukłym, to w zbiorze M istnieje **dokładnie jeden optymalny koszyk** towarów.

TEORIA POPYTU KONSUMENTA

Funkcja użyteczności

Funkcja użyteczności

Zamiast rozpatrywać relację preferencji konsumenta, wygodnie jest posługiwać się funkcją opisującą tę relację zwaną **funkcją użyteczności**.

Definicja: Funkcję $u: \mathfrak{S} \rightarrow R$ nazywamy funkcją użyteczności konsumenta z polem preferencji $(\mathfrak{S}, \preceq)$,

jeżeli
$$\bigwedge_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{S}} [u(\mathbf{x}) < u(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{x} \prec \mathbf{y}]$$

$$\bigwedge_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{S}} [u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{x} \sim \mathbf{y}]$$

Zachodzi również:

Twierdzenie

Jeżeli $u : R_+^n \rightarrow R$ jest funkcją użyteczności związaną z relacją preferencji „ $\succsim$ ”, oraz $g : R \rightarrow R$ jest funkcją rosnącą, to funkcja złożona $g \circ u : R_+^n \rightarrow R$ jest też funkcją użyteczności związaną z tą samą relacją preferencji.

Przykład

Niech $u : R_+^2 \rightarrow R$; $u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ będzie funkcją użyteczności związaną z relacją preferencji konsumenta, to funkcją użyteczności opisującą tę samą relację jest np. $v : R_+^2 \rightarrow R$; $v(\mathbf{x}) = v(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$

Twierdzenie

Jeżeli $\mathfrak{I} = R_+^n$ i relacja preferencji jest ciągła, to istnieje ciągła funkcja użyteczności $u : R_+^n \rightarrow R$ zgodna z polem preferencji $(\mathfrak{I}, \succsim)$.

Zakładane własności funkcji użyteczności

- u jest klasy $\mathcal{C}^2$ czyli ma ciągle pochodne rzędu II
- dodatnia użyteczność krańcowa każdego dobra

Użyteczność krańcowa i -tego dobra

Przyrost użyteczności z powodu wzrostu ilości i -tego dobra o Δx_i

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} &= \\ &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{u(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - u(\mathbf{x})}{\Delta x_i} > 0 \end{aligned}$$

Przyrost użyteczności z powodu wzrostu ilości i -tego dobra o Δx_i przypadający na jednostkę przyrostu dobra i -tego w koszyku

Krańcowa użyteczność i -tego towaru informuje o ile (w przybliżeniu) zmieni się użyteczność koszyka $\mathbf{x}$, jeśli ilość i -tego towaru wzrośnie o jednostkę, a ilości pozostałych towarów nie ulegną zmianie.

Przykład

Niech $u : R_+^2 \rightarrow R; \quad u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$

Jeśli rozważymy koszyk składający się z 3 jednostek towaru pierwszego i 1 jednostki towaru drugiego, to

➤ Jeżeli pole preferencji $(R_+^n, \succsim)$ jest silnie wypukłe, to hesjan funkcji u

$$\mathbf{H}_u(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

jest ujemnie określony czyli: $\bigwedge_{\mathbf{b} \neq 0} \mathbf{b}^T \mathbf{H}_u(\mathbf{x}) \mathbf{b} < 0$

Wniosek (Prawo Gossena):

$$\bigwedge_i \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i^2} < 0$$

Krańcowa użyteczność i -tego towaru maleje wraz ze wzrostem ilości tego towaru w koszyku $\mathbf{x}$, przy założeniu, że ilości pozostałych towarów nie ulegają zmianie.

➤ **Funkcja użyteczności jest rosnąca, czyli**

$$\bigwedge_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R_+^n} (\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \wedge \mathbf{x} \neq \mathbf{y}) \Rightarrow u(\mathbf{x}) < u(\mathbf{y})$$

Zjawisko niedosytu

Przykłady funkcji użyteczności spełniających powyższe założenia:

✓ **multiplikatywna:**
($a > 0, 0 < \alpha_i < 1 - i=1, \dots, n$)

$$u(\mathbf{x}) = a \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$$

✓ **logarytmiczna:**
($0 < \alpha_i < 1 - i=1, \dots, n$)

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i$$

✓ **addytywna:**
($a_i > 0, 0 < \alpha_i < 1 - i=1, \dots, n$)

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^{\alpha_i}$$

✓ **kwadratowa:**
($a_i > 0 - i=1, \dots, n$;
 $\mathbf{B}$ – ujemnie określona)

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + 0.5 \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x}$$

Krzywą (obszarem) obojętności względem koszyka $\mathbf{z}$ (zbiór wszystkich koszyków indyferentnych z koszykiem $\mathbf{z}$) nazywamy zbiór:

$$K_{\mathbf{z}} = \left\{ \mathbf{x} \in R_+^n : u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{z}) \right\}$$

i jeśli przyjmiemy $u(\mathbf{z})=c$, to

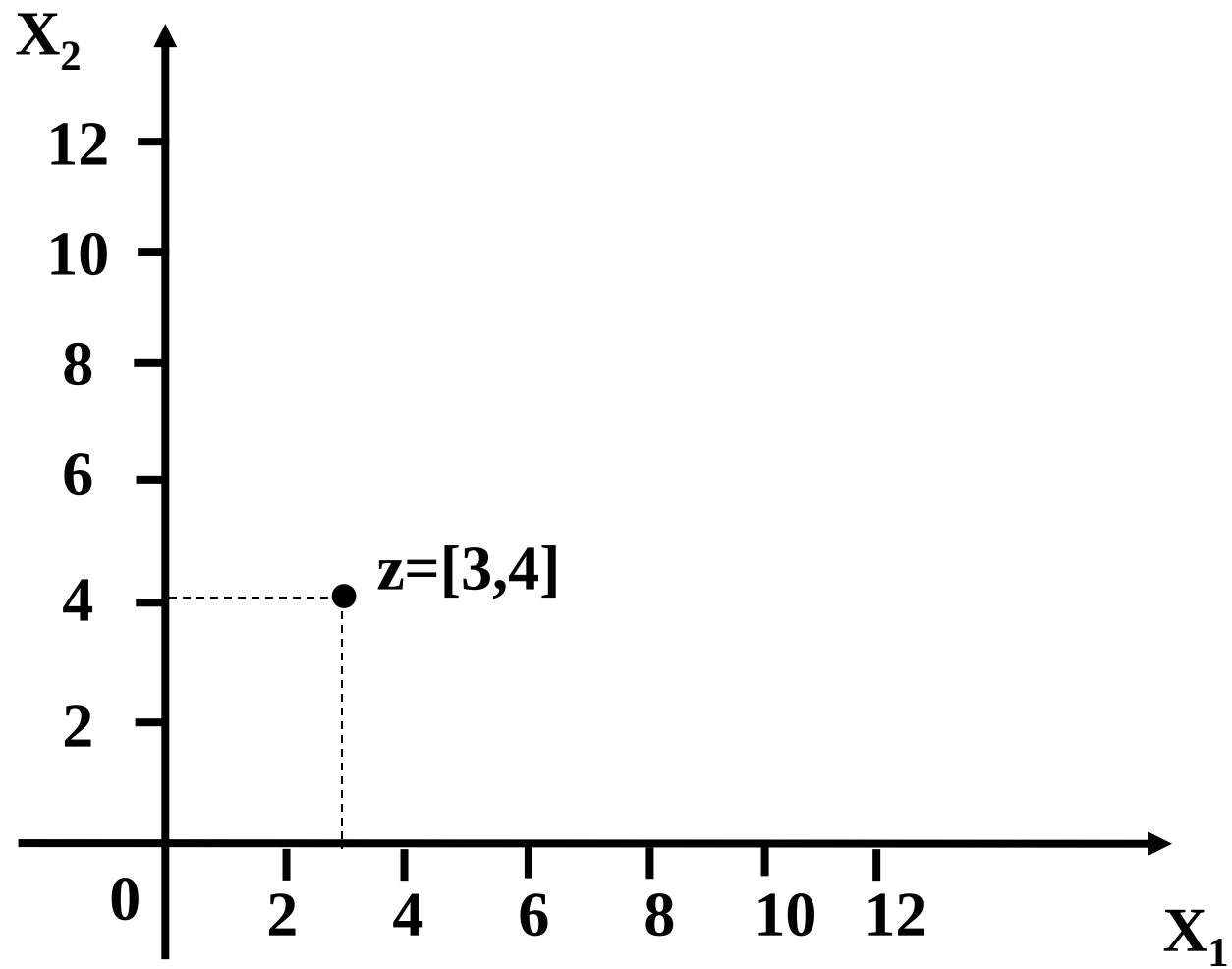
$$K^c = \left\{ \mathbf{x} \in R_+^n : u(\mathbf{x}) = c \right\} .$$

Przykład

Konsument ma funkcję użyteczności $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$

Krzywą obojętności koszyka $\mathbf{z}=[3,4]$ jest

$$K_{\mathbf{z}=[3,4]} = \left\{ [x_1, x_2] \in R_+^2 : u(x_1, x_2) = u(3, 4) \right\} =$$



Substytucja dóbr względem użyteczności

Dla ustalonej użyteczności $u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$,
zadajemy pytanie, jak powinna zmienić się dowolna
zmienna x_j gdyby zmiana ulegały wartości pozostałych
zmiennych x_i ($i \neq j$).

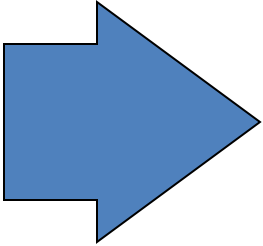
Twierdzenie o funkcji uwikłanej

$$\bigwedge_j \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j} > 0$$

$$\bigwedge_j \bigvee_{g_j: \mathcal{Q} \rightarrow R} x_j = g_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

Istnieje takie
otoczenie koszyka $\mathbf{x}$

substytucja


$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}}{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j}} < 0$$

**Zmiany ilości
dwóch dóbr przy
stałej
użyteczności są
różnokierunkowe**

Definicja: Krańcowa stopa substytucji i -tego przez j -ty
towar w koszyku $\mathbf{x}$:

$$s_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i}}{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j}} = - \frac{\partial x_j}{\partial x_i} > 0$$

Krańcowa stopa substytucji $s_{ij}(\mathbf{x})$ informuje o ile jednostek (w przybliżeniu) należy zmniejszyć w koszyku $\mathbf{x}$ ilość j -tego towaru przy zwiększeniu ilości i -tego towaru o jednostkę, aby użyteczność koszyka nie uległa zmianie.

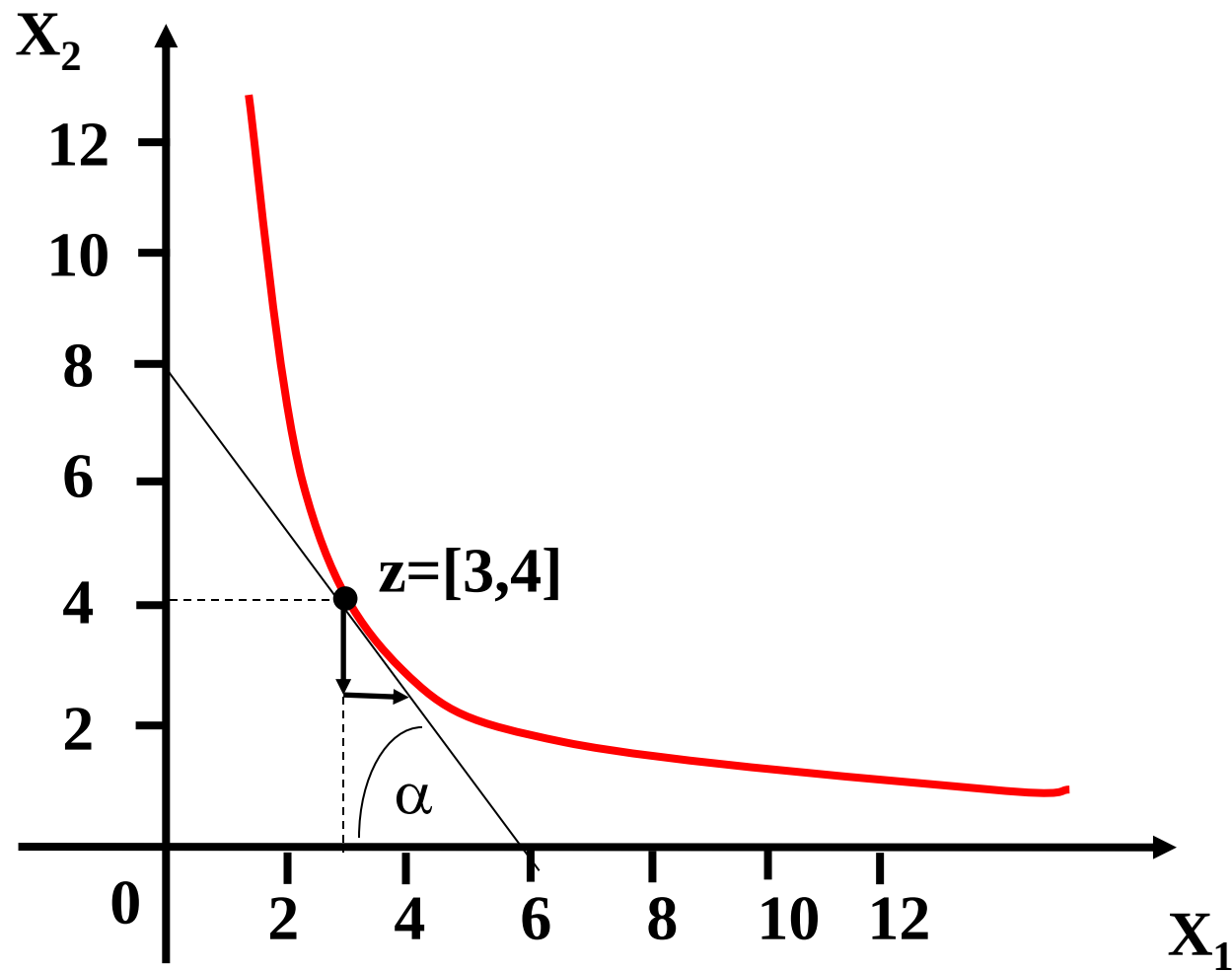
Przykład

Relację preferencji konsumenta opisuje funkcja użyteczności: $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$

Krańcowa stopa substytucji 1-tego przez 2-ty towar w koszyku $\mathbf{x}=[x_1, x_2]$:

$$s_{12}(x_1, x_2) = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_2}} =$$

Natomiaŝt w koŝyku [3,4]



Definicja: Elastyczność substytucji i -tego przez j -ty towar w koszyku $\mathbf{x}$:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = s_{ij}(\mathbf{x}) \frac{x_i}{x_j} = \frac{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} x_i}{\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j} x_j}$$

Elastyczność substytucji $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$ informuje o ile procent (w przybliżeniu) należy zmniejszyć w koszyku $\mathbf{x}$ ilość j -tego towaru przy zwiększeniu ilości i -tego towaru o jeden procent, aby użyteczność koszyka nie uległa zmianie.

Zadanie maksymalizacji użyteczności

Niech I – dochód konsumenta

$\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_n]$ - ceny poszczególnych dóbr

Wówczas wartość koszyka $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ wynosi

$$\mathbf{p}\mathbf{x}^T = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

Zbiór wszystkich koszyków na jakie stać konsumenta dysponującego dochodem I przy cenach $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_n]$ nazywamy **zbiorem budżetowym**

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{p}, I) &= \left\{ \mathbf{x} \in R_+^n : \mathbf{p}\mathbf{x}^T \leq I \right\} = \\ &= \left\{ [x_1, \dots, x_n] \in R_+^n : \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq I \right\} \end{aligned}$$

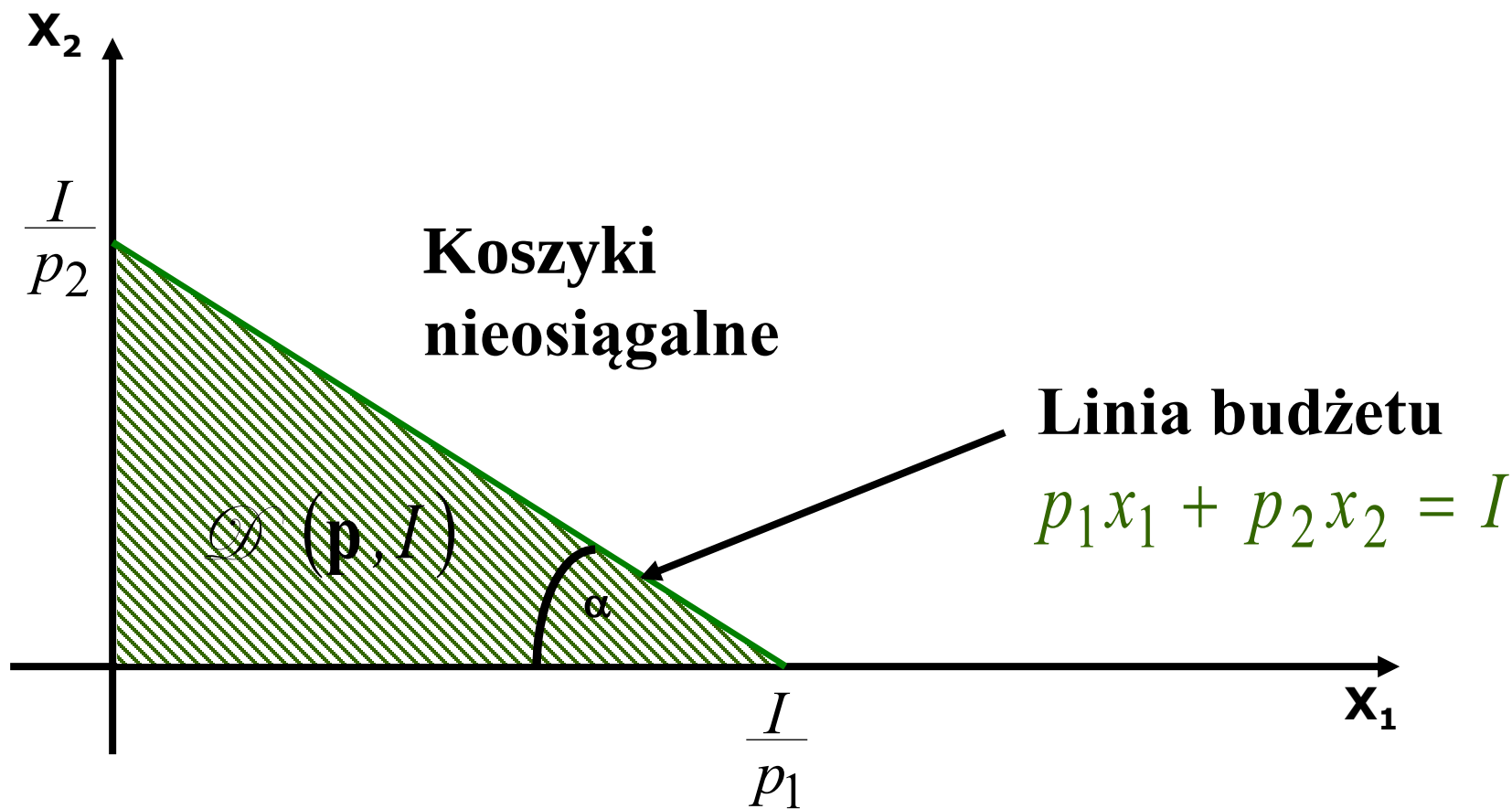
Linia budżetu nazywamy zbiór wszystkich tych koszyków, których kupno wymaga wydania całego dochodu, tj. zbiór

$$\left\{ \mathbf{x} \in R_+^n : \boxed{\mathbf{p} \mathbf{x}^T = I} \right\} = \left\{ [x_1, \dots, x_n] \in R_+^n : \boxed{\sum_{i=1}^n p_i x_i = I} \right\}$$

W przypadku dwóch towarów:

$$\mathcal{D}(\mathbf{p}, I) = \left\{ [x_1, x_2] \in R_+^2 : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I \right\} \quad \text{- zbiór budżetowy}$$

$$\left\{ [x_1, x_2] \in R_+^2 : p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \right\} \quad \text{- Linia budżetu}$$



Zbiór $\mathcal{D}(\mathbf{p}, I)$ jest domknięty, ograniczony i wypukły.

Jeśli pole preferencji konsumenta jest silnie wypukłe, a funkcja użyteczności u jest rosnąca i ciągła, to w zbiorze budżetowym **istnieje dokładnie jeden optymalny koszyk $\mathbf{x}_0$ spełniający warunek:**

$$\bigwedge_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}(\mathbf{p}, I), \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0} u(\mathbf{x}_0) > u(\mathbf{x})$$

Zatem koszyk $\mathbf{x}_0$ jest rozwiązaniem zadania maksymalizacji użyteczności konsumenta:

$$\max_{\mathbf{x}} \left\{ u(\mathbf{x}) : \mathbf{p}\mathbf{x}^T \leq I \wedge \mathbf{x} \geq 0 \right\}$$

Jeśli funkcja użyteczności u jest rosnąca i ciągła (w polu preferencji występuje zjawisko niedosytu), to aby zmaksymalizować użyteczność koszyka, konsument musi wydać cały dochód I czyli optymalny koszyk $\mathbf{x}_0$ należy do linii budżetu.

Zadanie maksymalizacji użyteczności konsumpcji można podać następująco:

$$\max_{\mathbf{x}} \left\{ u(\mathbf{x}) : \mathbf{p}\mathbf{x}^T = I \wedge \mathbf{x} \geq 0 \right\} \quad (*)$$

Szukanie maksimum warunkowego (funkcja Lagrange'a)

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = u(x_1, \dots, x_n) + \lambda \left(I - \sum_{i=1}^n p_i x_i \right)$$

λ - mnożnik Lagrange'a

Jeśli pole preferencji konsumenta jest silnie wypukłe, a funkcja użyteczności u jest rosnąca i ciągła, to **koszyk** $\mathbf{x}_0 = [x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}]$ jest rozwiązaniem zadania (*) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $\lambda_0 > 0$, że dla λ_0 oraz $\mathbf{x}_0 = [x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}]$ spełniony jest następujący układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bigwedge_{i=1, \dots, n} \frac{\partial L(x_{01}, \dots, x_{0n}, \lambda_0)}{\partial x_i} = 0 \\ \sum_{i=1}^n p_i x_{0i} = I \end{array} \right.$$

$$\text{lub} \left\{ \begin{array}{l} \bigwedge_{i=1, \dots, n} \frac{\partial u(x_{01}, \dots, x_{0n})}{\partial x_i} = \lambda_0 p_i \\ \sum_{i=1}^n p_i x_{0i} = I \end{array} \right.$$

Krańcowa użyteczność dochodu

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}_0)}{\partial I} = \lambda_0$$

Krańcowa użyteczność dochodu informuje, o ile w przybliżeniu zmieni się użyteczność (maksymalna) koszyka optymalnego, jeśli dochód konsumenta wzrośnie o 1 jednostkę pieniężną.

Krańcowa stopa substytucji i -tego przez j -ty towar w koszyku optymalnym

$$s_{ij}(\mathbf{x}_0) = \frac{\frac{\partial u(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}}{\frac{\partial u(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j}} = \frac{\lambda_0 p_i}{\lambda_0 p_j} = \frac{p_i}{p_j}$$

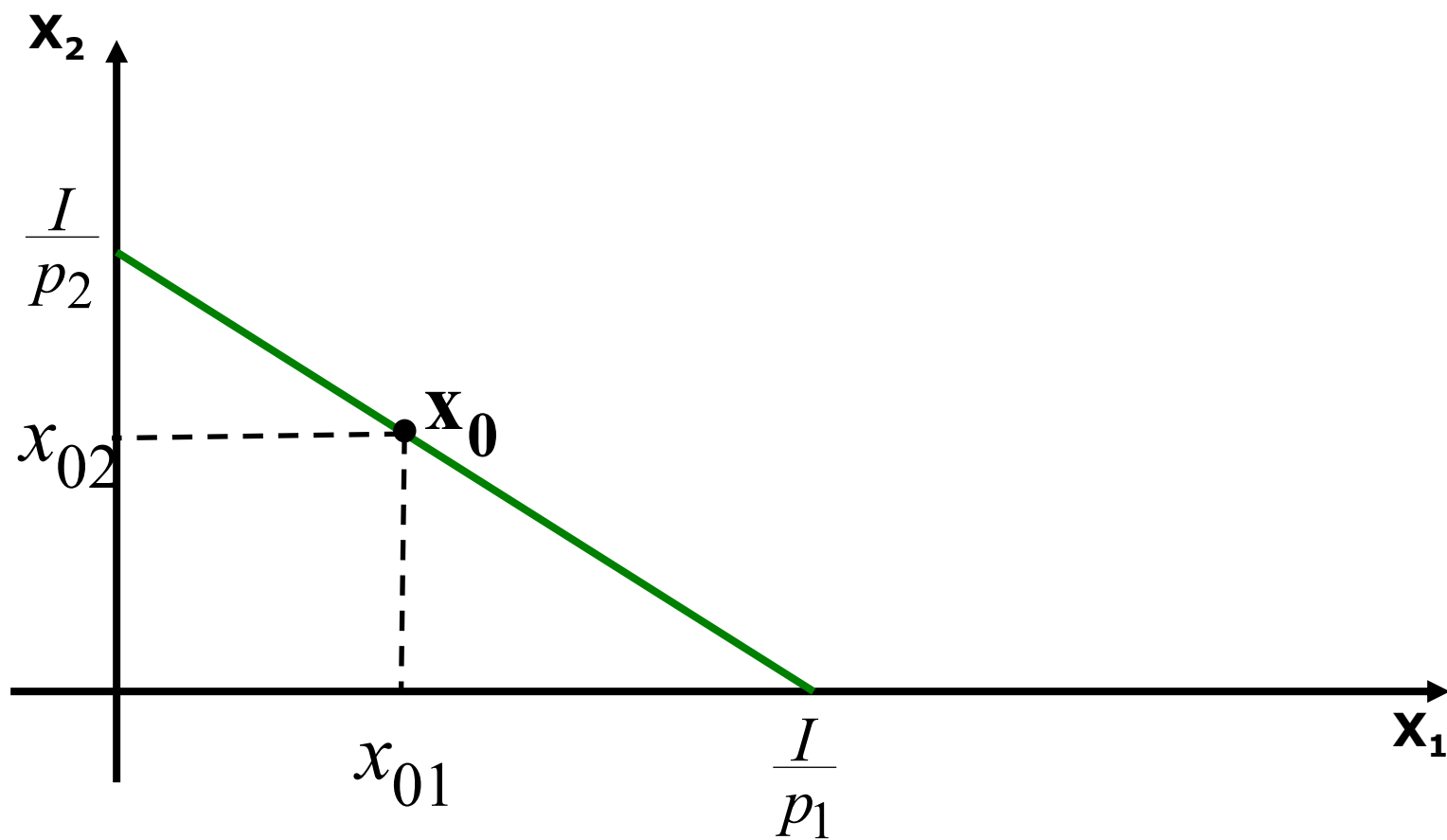
Krańcowa stopa substytucji dwóch dowolnych towarów w optymalnym koszyku jest równa stosunkowi cen tych towarów.

W przypadku dwóch towarów:

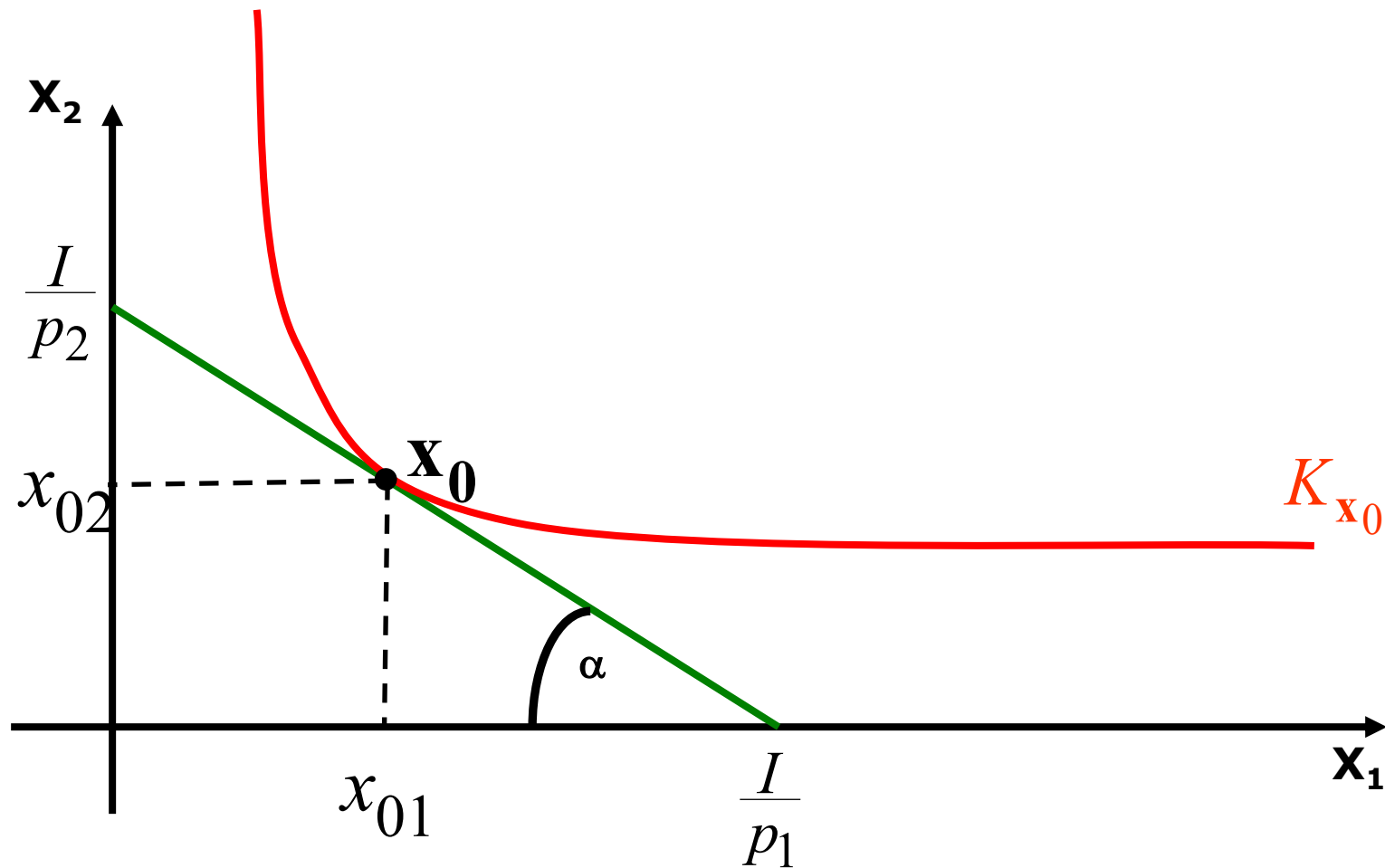
$$\max_{x_1, x_2} \{ u(x_1, x_2) : p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \wedge x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \}$$

Rozwiązujemy układ równań

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lambda \quad p_1 \\ \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \lambda \quad p_2 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \end{array} \right. \quad \text{lub}$$



Koszyk optymalny charakteryzuje się tym, że w punkcie $\mathbf{x}_0 = [x_{01}, x_{02}]$ nachylenie linii budżetu jest równe nachyleniu krzywej obojętności.



TEORIA POPYTU KONSUMENTA

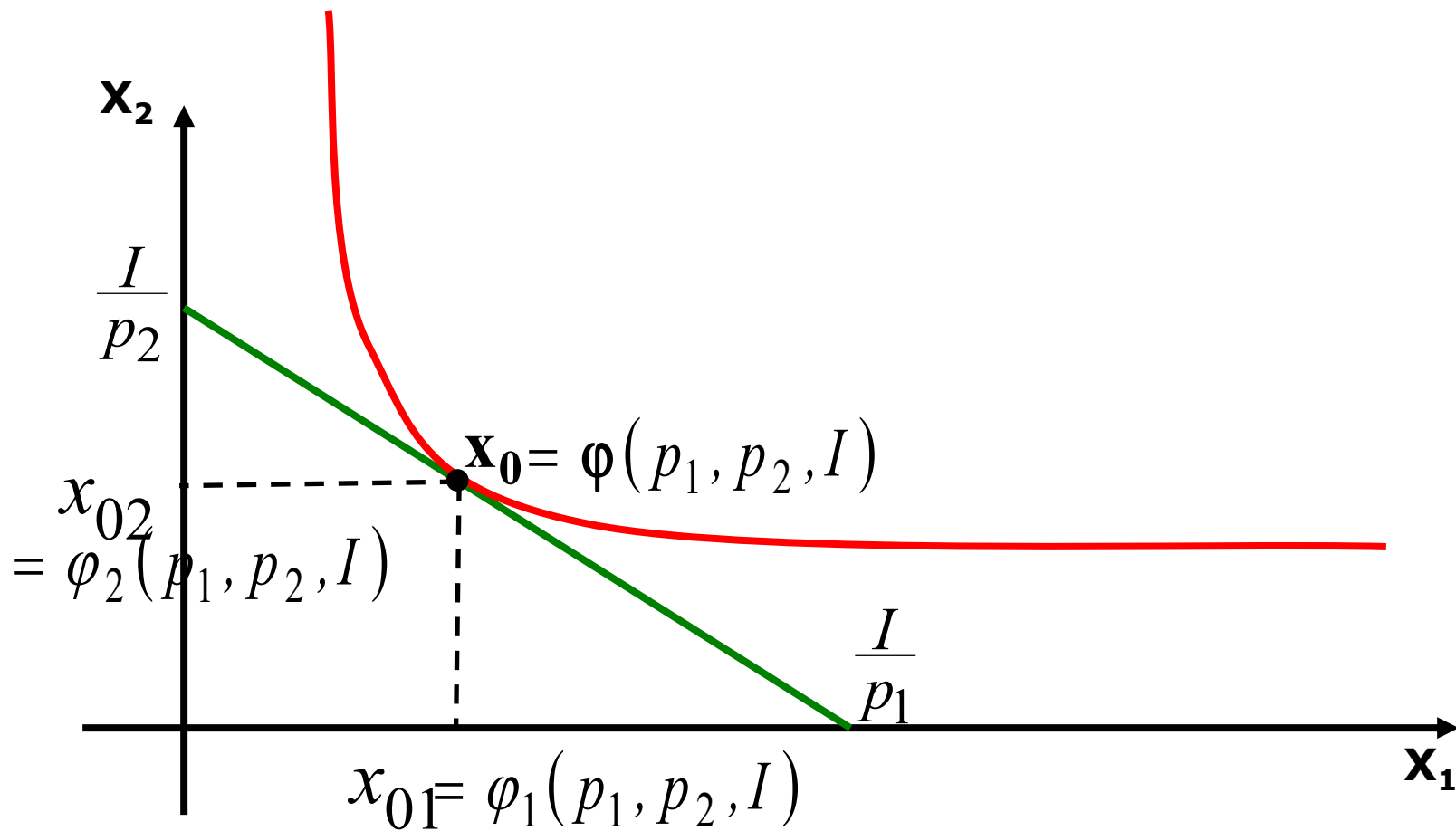
*Funkcja popytu
konsumenta*

Funkcją popytu konsumenta nazywamy odwzorowanie, które wektorowi cen $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_n] > 0$ i dochodowi $I > 0$ przyporządkowuje rozwiązanie zadania maksymalizacji użyteczności konsumpcji (koszyk optymalny).

Funkcja popytu konsumenta jest funkcją wektorową

$$\varphi : R_+^{n+1} \rightarrow R_+^n, \text{ gdzie } \mathbf{x}_0 = \varphi(\mathbf{p}, I)$$

$$\begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(p_1, p_2, \dots, p_n, I) \\ \varphi_2(p_1, p_2, \dots, p_n, I) \\ \vdots \\ \varphi_n(p_1, p_2, \dots, p_n, I) \end{bmatrix}$$



Przykład

Znajdź funkcję popytu konsumenta kierującego się funkcją użyteczności:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}}$$

Rozwiązujemy zadanie:

$$\max_{x_1, x_2} \left\{ u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}} : p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \wedge x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \right\}$$

Tworzymy układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lambda \quad p_1 \\ \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \lambda \quad p_2 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \end{array} \right.$$

Otrzymujemy:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{01} = \frac{Ip_2}{p_1^2 + p_1p_2} \\ x_{02} = \frac{Ip_1}{p_2^2 + p_1p_2} \\ \lambda_0 = \left(\frac{p_1 + p_2}{4Ip_1p_2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Zatem

$$\varphi_1(p_1, p_2, I) = \frac{Ip_2}{p_1^2 + p_1 p_2}$$

$$\varphi_2(p_1, p_2, I) = \frac{Ip_1}{p_2^2 + p_1 p_2}$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi} : R_+^3 \rightarrow R_+^2$$

oraz

$$\lambda_0 = \left(\frac{p_1 + p_2}{4Ip_1 p_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Popytem krańcowym na i -ty towar **względem ceny** j -tego towaru nazywamy pochodną:

$$\frac{\partial \varphi_i(\mathbf{p}, I)}{\partial p_j} = \lim_{\Delta p_j \rightarrow 0} \frac{\varphi_i(p_1, \dots, p_j + \Delta p_j, \dots, p_n, I) - \varphi_i(p_1, \dots, p_j, \dots, p_n, I)}{\Delta p_j}$$

Popyt krańcowy na i -ty towar **względem ceny** j -tego towaru informuje, o ile jednostek w przybliżeniu zmieni się popyt na i -ty towar, jeśli cena j -tego towaru wzrośnie o jednostkę pieniężną, a pozostałe ceny i dochód konsumenta nie ulegną zmianie.

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{p}, I)}{\partial \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{p}, I)}{\partial p_1} & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{p}, I)}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{p}, I)}{\partial p_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{p}, I)}{\partial p_1} & \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{p}, I)}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{p}, I)}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{p}, I)}{\partial p_1} & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{p}, I)}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{p}, I)}{\partial p_n} \end{bmatrix}$$

Gdy n=2

$$\frac{\partial \Phi(p_1, p_2, I)}{\partial \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(p_1, p_2, I)}{\partial p_1} & \frac{\partial \varphi_1(p_1, p_2, I)}{\partial p_2} \\ \frac{\partial \varphi_2(p_1, p_2, I)}{\partial p_1} & \frac{\partial \varphi_2(p_1, p_2, I)}{\partial p_2} \end{bmatrix}$$

Elastycznością popytu na i -ty towar **względem ceny** j -tego towaru (elastycznością cenową) nazywamy :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}^c(\mathbf{p}, I) &= \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{p}, I)}{\partial p_j} \cdot \frac{p_j}{\varphi_i(\mathbf{p}, I)} = \\ &= \lim_{\Delta p_j \rightarrow 0} \frac{\frac{\varphi_i(p_1, \dots, p_j + \Delta p_j, \dots, p_n, I) - \varphi_i(p_1, \dots, p_j, \dots, p_n, I)}{\Delta p_j}}{\frac{p_j}{\varphi_i(p_1, \dots, p_n, I)}}\end{aligned}$$

Elastyczność popytu na i -ty towar **względem ceny** j -tego towaru informuje, o ile procent w przybliżeniu zmieni się popyt na i -ty towar, jeśli cena j -tego towaru wzrośnie o jeden procent, a pozostałe ceny i dochód konsumenta nie ulegną zmianie.

Jeśli $i = j$, to mówimy o tzw. **prostej elastyczności cenowej popytu** (prostym popycie krańcowym), a dla $i \neq j$ o **krzyżowej elastyczności cenowej popytu** (krzyżowym popycie krańcowym)

$$\boldsymbol{\varepsilon}^c(\mathbf{p}, I) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^c(\mathbf{p}, I) & \varepsilon_{12}^c(\mathbf{p}, I) & \dots & \varepsilon_{1n}^c(\mathbf{p}, I) \\ \varepsilon_{21}^c(\mathbf{p}, I) & \varepsilon_{22}^c(\mathbf{p}, I) & \dots & \varepsilon_{2n}^c(\mathbf{p}, I) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{n1}^c(\mathbf{p}, I) & \varepsilon_{n2}^c(\mathbf{p}, I) & \dots & \varepsilon_{nn}^c(\mathbf{p}, I) \end{bmatrix}$$

Gdy n=2

$$\boldsymbol{\varepsilon}^c(p_1, p_2, I) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^c(p_1, p_2, I) & \varepsilon_{12}^c(p_1, p_2, I) \\ \varepsilon_{21}^c(p_1, p_2, I) & \varepsilon_{22}^c(p_1, p_2, I) \end{bmatrix}$$

Towar nazywamy **normalnym**, jeśli popyt na ten towar maleje wraz ze wzrostem jego ceny ($\varepsilon_{ii}^c < 0$).

Towar nazywamy **towarem Giffena**, jeśli popyt na ten towar rośnie wraz ze wzrostem jego ceny ($\varepsilon_{ii}^c > 0$).

Towar i -ty nazywamy **substytucyjnym** względem towaru j -tego, jeśli wzrost ceny towaru j -tego powoduje wzrost popytu na towar i -ty ($\varepsilon_{ij}^c > 0 \ i \neq j$).

Towar i -ty nazywamy **komplementarnym** względem towaru j -tego, jeśli wzrost ceny towaru j -tego powoduje spadek popytu na towar i -ty ($\varepsilon_{ij}^c < 0 \ i \neq j$).

Popytem krańcowym na i -ty towar **względem dochodu** konsumenta nazywamy pochodną:

$$\frac{\partial \varphi_i(\mathbf{p}, I)}{\partial I} = \lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\varphi_i(p_1, \dots, p_n, I + \Delta I) - \varphi_i(p_1, \dots, p_n, I)}{\Delta I}$$

Popyt krańcowy na i -ty towar **względem dochodu** konsumenta informuje, o ile jednostek w przybliżeniu zmieni się popyt na i -ty towar, jeśli dochód wzrośnie o jednostkę pieniężną, a ceny towarów nie ulegną zmianie.

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{p}, I)}{\partial I} = \left[\frac{\partial \varphi_1(\mathbf{p}, I)}{\partial I} \quad \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{p}, I)}{\partial I} \quad \dots \quad \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{p}, I)}{\partial I} \right]$$

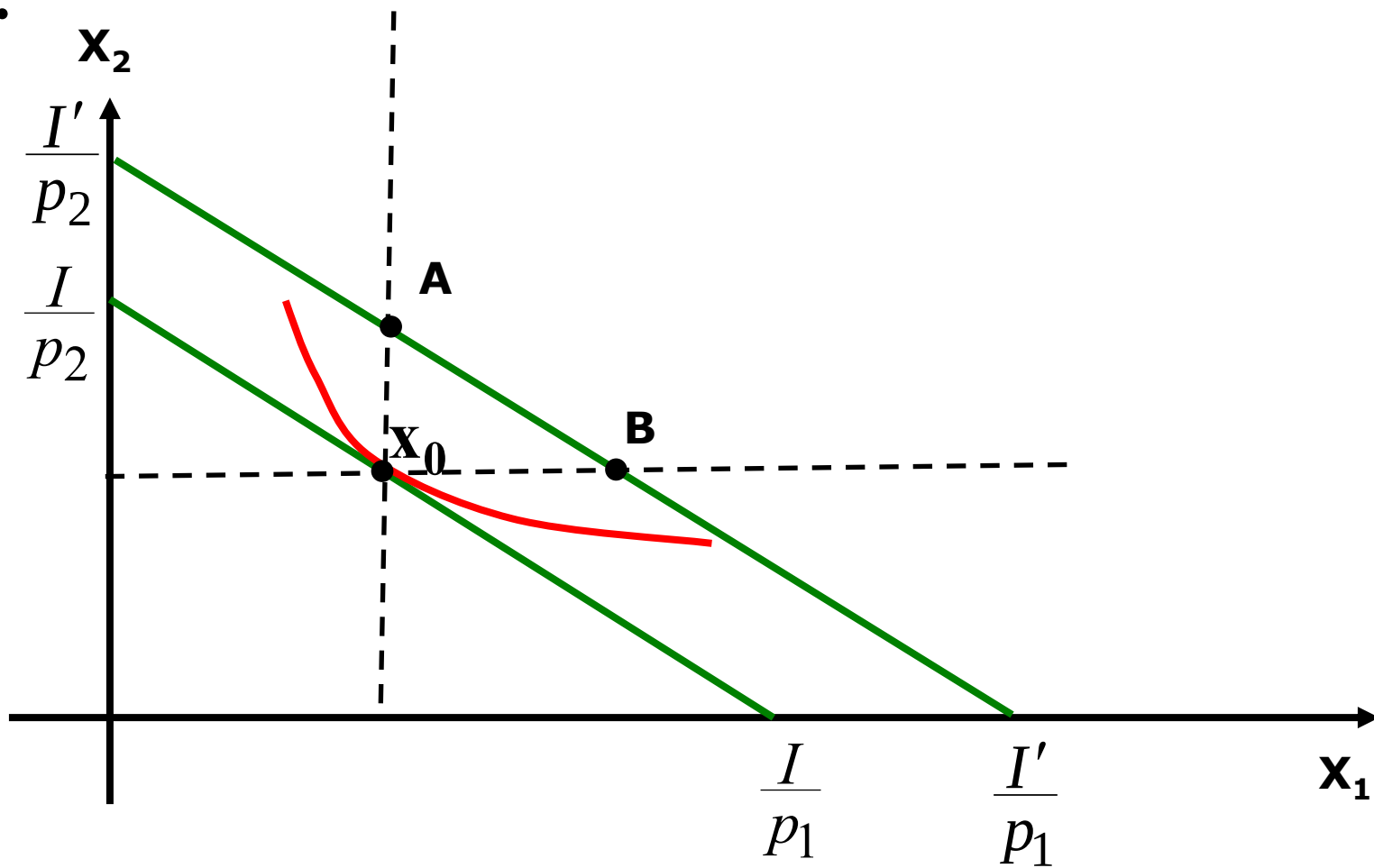
Elastycznością popytu na i -ty towar **względem dochodu** konsumenta (elastycznością dochodową) nazywamy:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i^d(\mathbf{p}, I) &= \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{p}, I)}{\partial I} \cdot \frac{I}{\varphi_i(\mathbf{p}, I)} = \\ &= \lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\frac{\varphi_i(p_1, \dots, p_n, I + \Delta I) - \varphi_i(p_1, \dots, p_n, I)}{\Delta I}}{\frac{I}{I}}\end{aligned}$$

Elastyczność popytu na i -ty towar **względem dochodu** informuje, o ile procent w przybliżeniu zmieni się popyt na i -ty towar, jeśli dochód konsumenta wzrośnie o jeden procent, a ceny towarów nie ulegną zmianie.

Towarem wyższego rzędu nazywamy towar, na który konsument zwiększa popyt, gdy wzrasta jego dochód ($\varepsilon_i^d > 0$).

Towarem niższego rzędu nazywamy towar, na który konsument zmniejsza popyt, gdy wzrasta jego dochód ($\varepsilon_i^d < 0$).



Przykład c.d.

$$\varphi_1(p_1, p_2, I) = \frac{Ip_2}{p_1^2 + p_1p_2} \quad \varphi_2(p_1, p_2, I) = \frac{Ip_1}{p_2^2 + p_1p_2}$$

Charakterystyki funkcji popytu z poprzedniego przykładu są następujące:

Macierz cenowych popytów krańcowych:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}(p_1, p_2, I)}{\partial \mathbf{p}} = \begin{bmatrix} -\frac{Ip_2(2p_1 + p_2)}{(p_1^2 + p_1p_2)^2} & \frac{I}{(p_1 + p_2)^2} \\ \frac{I}{(p_1 + p_2)^2} & -\frac{Ip_1(2p_2 + p_1)}{(p_2^2 + p_1p_2)^2} \end{bmatrix}$$

Macierz cenowych elastyczności:

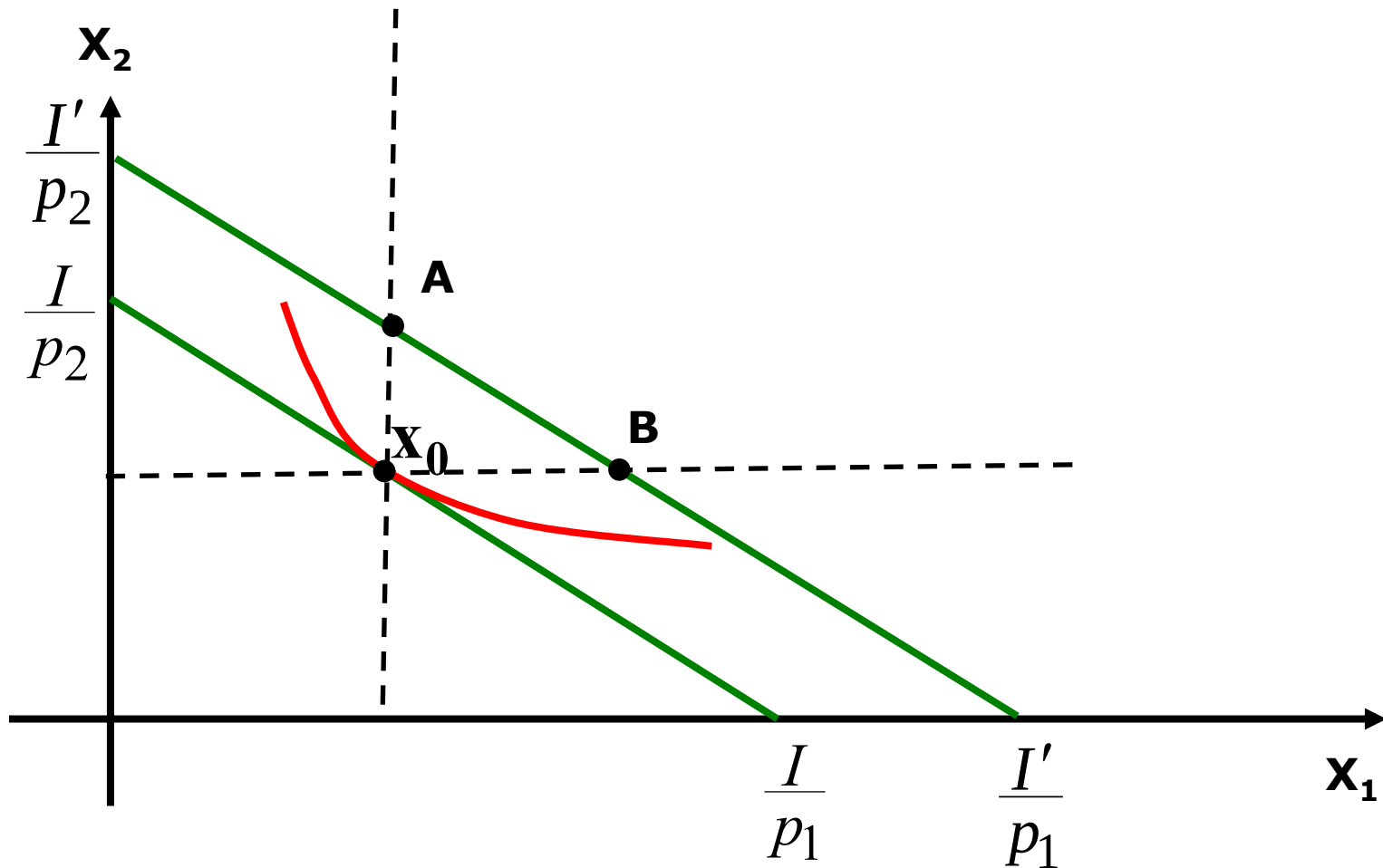
$$\boldsymbol{\varepsilon}^c(p_1, p_2, I) = \begin{bmatrix} -\frac{2p_1 + p_2}{p_1 + p_2} & \frac{p_1}{p_1 + p_2} \\ \frac{p_2}{p_1 + p_2} & -\frac{2p_2 + p_1}{p_1 + p_2} \end{bmatrix}$$

Wektor popytów krańcowych względem dochodu:

Wektor dochodowych elastyczności:

Wzrost dochodu konsumenta powoduje wzrost popytu na przynajmniej jeden towar, tzn.

$$\bigwedge_{\mathbf{p}, I} \bigvee_j \frac{\partial \varphi_j(\mathbf{p}, I)}{\partial I} > 0$$



TEORIA POPYTU KONSUMENTA

Równanie Stuckiego -
substytucyjne i dochodowe
efekty zmiany cen

Zadanie minimalizacji wydatków przy ustalonym poziomie użyteczności konsumpcji można podać następująco:

$$\min_{\mathbf{x}} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i x_i : u(\mathbf{x}) = u = \text{const} \wedge \mathbf{x} \geq 0 \right\} \quad (1)$$

Wydatki konsumenta

W przypadku dwóch towarów:

$$\min_{x_1, x_2} \{ p_1 x_1 + p_2 x_2 : u(x_1, x_2) = u = \text{const} \wedge x_1, x_2 \geq 0 \}$$

Wydatki konsumenta

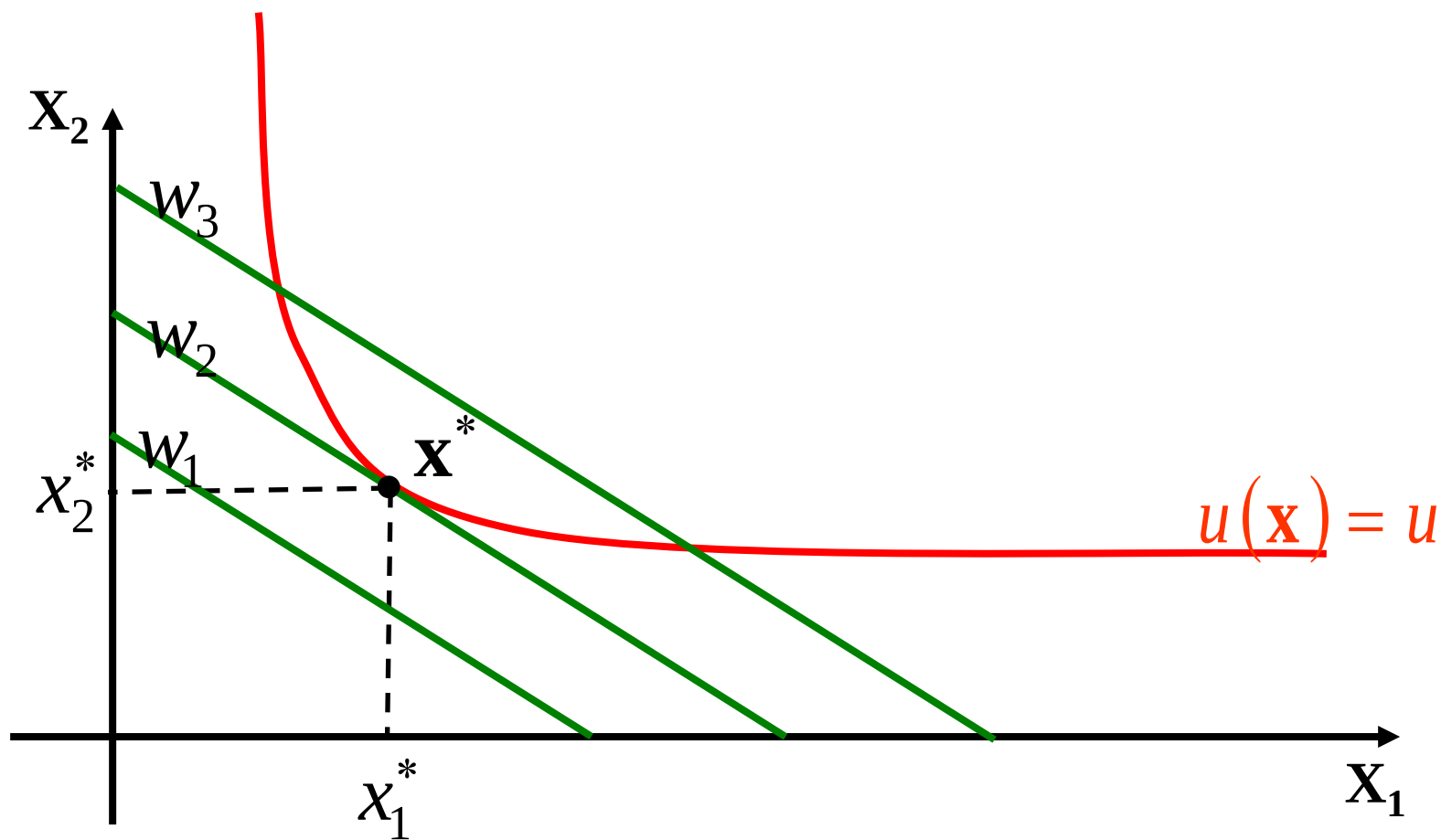
Jeśli funkcja użyteczności u jest rosnąca i ciągła, a pole preferencji konsumenta jest silnie wypukłe, to **istnieje dokładnie jedno rozwiązanie optymalne x^*** zadania (1).

Funkcją kompensacyjnego popytu nazywamy odwzorowanie f , które wektorowi cen $p = [p_1, \dots, p_n] > 0$ i każdemu poziomowi użyteczności u przyporządkowuje odpowiadające im rozwiązanie $x^* = f(p, u)$ zadania minimalizacji wydatków.

Zatem funkcja kompensacyjnego popytu każdej parze (p, u) przyporządkowuje najtańszy koszyk.

$$f(p, u) = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(p_1, p_2, \dots, p_n, u) \\ f_2(p_1, p_2, \dots, p_n, u) \\ \vdots \\ f_n(p_1, p_2, \dots, p_n, u) \end{bmatrix}$$

Ilustracja graficzna zadania minimalizacji wydatków



Przykład

Znajdujemy funkcję popytu konsumenta kierującego się funkcją użyteczności: $u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$

Rozwiązujemy zadanie:

$$\max_{x_1, x_2} \left\{ u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} : p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \wedge x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \right\}$$

Tworzymy układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lambda \quad p_1 \\ \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \lambda \quad p_2 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = \lambda \, p_1 \\ \frac{1}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} = \lambda \, p_2 \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = I \end{cases}$$

Zatem

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varphi} : R_+^3 \rightarrow R_+^2$$

Szukamy funkcji $f(p, u)$ czyli rozwiązujemy zadanie:

$$\min_{x_1, x_2} \left\{ p_1 x_1 + p_2 x_2 : u(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = u = \text{const} \wedge x_1, x_2 \geq 0 \right\}$$

Z warunku $x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = u$ wyznaczamy x_2 jako funkcję x_1

(*)

i wówczas rozwiązujemy zadanie:

Przyrównując pochodną funkcji celu do zera mamy:

$$p_1 - \frac{p_2 u^2}{x_1^2} = 0$$

i stąd

$$x_1^* = u p_1^{-\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}}$$

a podstawiając do równania (*): $x_2^* = u p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{-\frac{1}{2}}$

Zatem

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} : R_+^3 \rightarrow R_+^2$$

$$f_1(p_1, p_2, u) = u p_1^{-\frac{1}{2}} p_2^{\frac{1}{2}} \quad f_2(p_1, p_2, u) = u p_1^{\frac{1}{2}} p_2^{-\frac{1}{2}}$$

Substytucyjne i dochodowe efekty zmiany cen

Kiedy cena dobra ulega zmianie, pojawiają się dwa rodzaje efektów:

- zmienia się stosunek, według którego wymieniane jest jedno dobro na drugie (**efekt substytucyjny**);
- zmienia się ogólna siła nabywcza dochodu (**efekt dochodowy**).

Równanie Slutskiego wg Hicksa

Jeśli funkcje $f(\mathbf{p}, u)$ oraz $\varphi(\mathbf{p}, I)$ są różniczkowalne i $u=v(\mathbf{p}, I)$, to spełnione jest równanie Slutskiego:

$$\bigwedge_{i,j} \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{p}, I)}{\partial p_j} = \frac{\partial f_i(\mathbf{p}, u)}{\partial p_j} - \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{p}, I)}{\partial I} \varphi_j(\mathbf{p}, I)$$

**Całkowity
efekt zmiany
ceny**

**Efekt substytucyjny
wg Hicksa**

**Efekt
dochodowy**

Całkowita zmiana popytu z tytułu zmiany ceny przy stałym dochodzie jest sumą efektu substytucyjnego i dochodowego.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

p_1, p_2, I - ceny i dochód konsumenta przed zmianami;

p'_2 - cena dobra drugiego po zmianach

A – popyt przed zmianą cen

B – popyt po zmianie cen

C – popyt przy dochodzie kompensującym zmianę cen

Zmiana popytu:

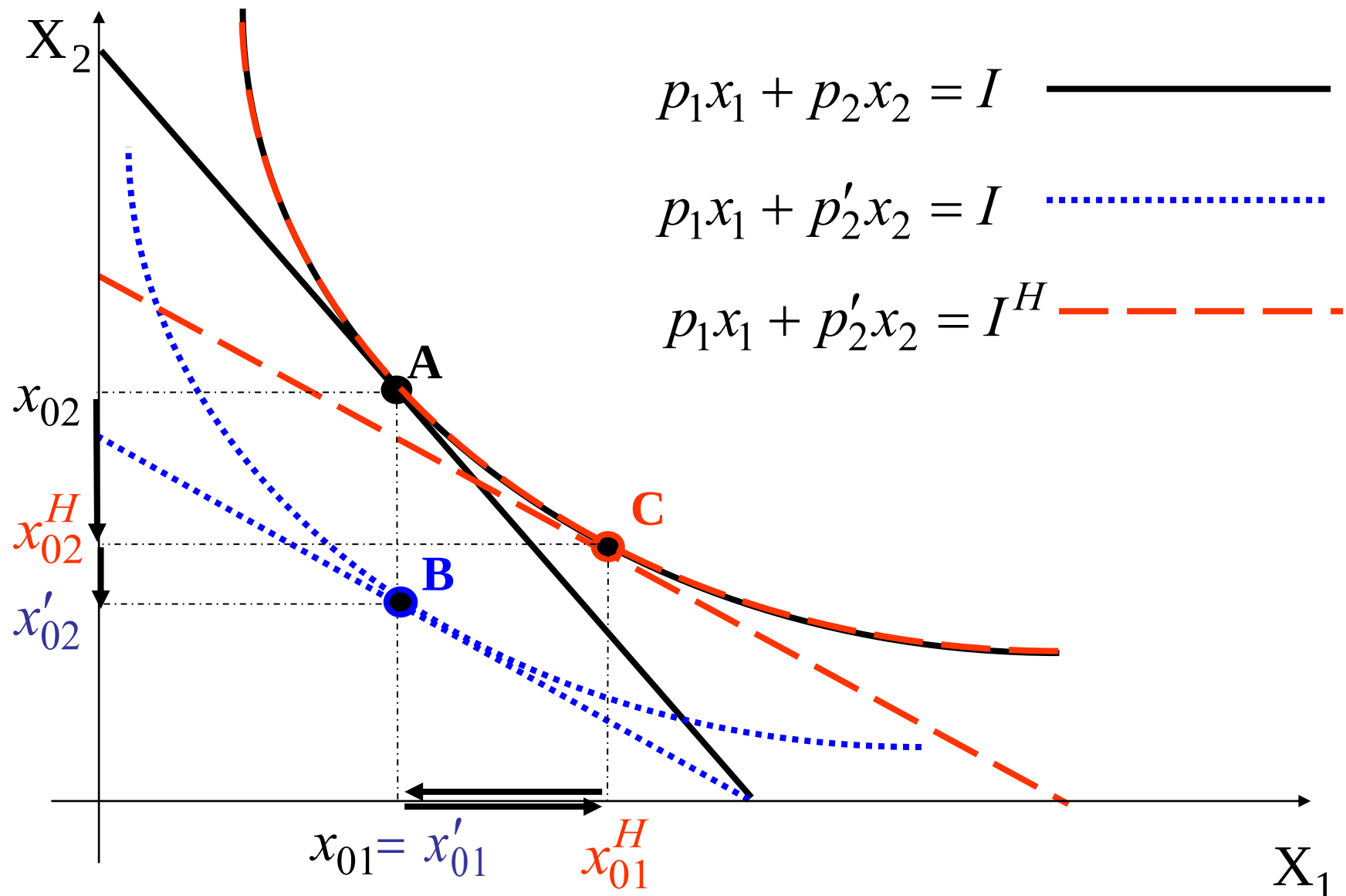
A→B całkowita

A→C spowodowana zmianą struktury cen (efekt substytucyjny)

C→B spowodowana zmianą siły nabywczej dochodu (efekt dochodowy)

Dochód kompensujący zmianę cen wg Hicksa:

I^H – najmniejszy dochód, przy którym po zmianie cen wybrany koszyk ma użyteczność taką jak koszyk początkowy



Całkowita zmiana popytu na i -ty towar ($i=1,2$):

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i(p_1, p'_2, I) - \varphi_i(p_1, p_2, I)$$

Efekt substytucyjny i -tego towaru ($i=1,2$) wg Hicksa:

$$\Delta\varphi_i^s = \varphi_i(p_1, p'_2, I^H) - \varphi_i(p_1, p_2, I)$$

Efekt dochodowy na i -ty towar ($i=1,2$) wg Hicksa:

$$\Delta\varphi_i^d = \varphi_i(p_1, p'_2, I) - \varphi_i(p_1, p'_2, I^H)$$

Całkowita zmiana popytu z tytułu zmiany ceny przy stałym dochodzie jest sumą efektu substytucyjnego i dochodowego:

$$\Delta\varphi_i = \Delta\varphi_i^s + \Delta\varphi_i^d \quad (\text{tożsamość Slutskiego})$$

Równanie Slutskiego wg Slutskiego

Jeśli inaczej będzie określony popyt kompensujący zmianę cen – jako popyt konsumenta przy wektorze cen $\mathbf{p}$, by dostępny był ustalony koszyk $\mathbf{x}_0$, to otrzymujemy analogiczne równanie Slutskiego:

$$\bigwedge_{i,j} \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{p}, I)}{\partial p_j} = \frac{\partial f_i^{Sl}(\mathbf{p}, \mathbf{x}_0)}{\partial p_j} - \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{p}, I)}{\partial I} \varphi_j(\mathbf{p}, I)$$

**Całkowity
efekt zmiany
ceny**

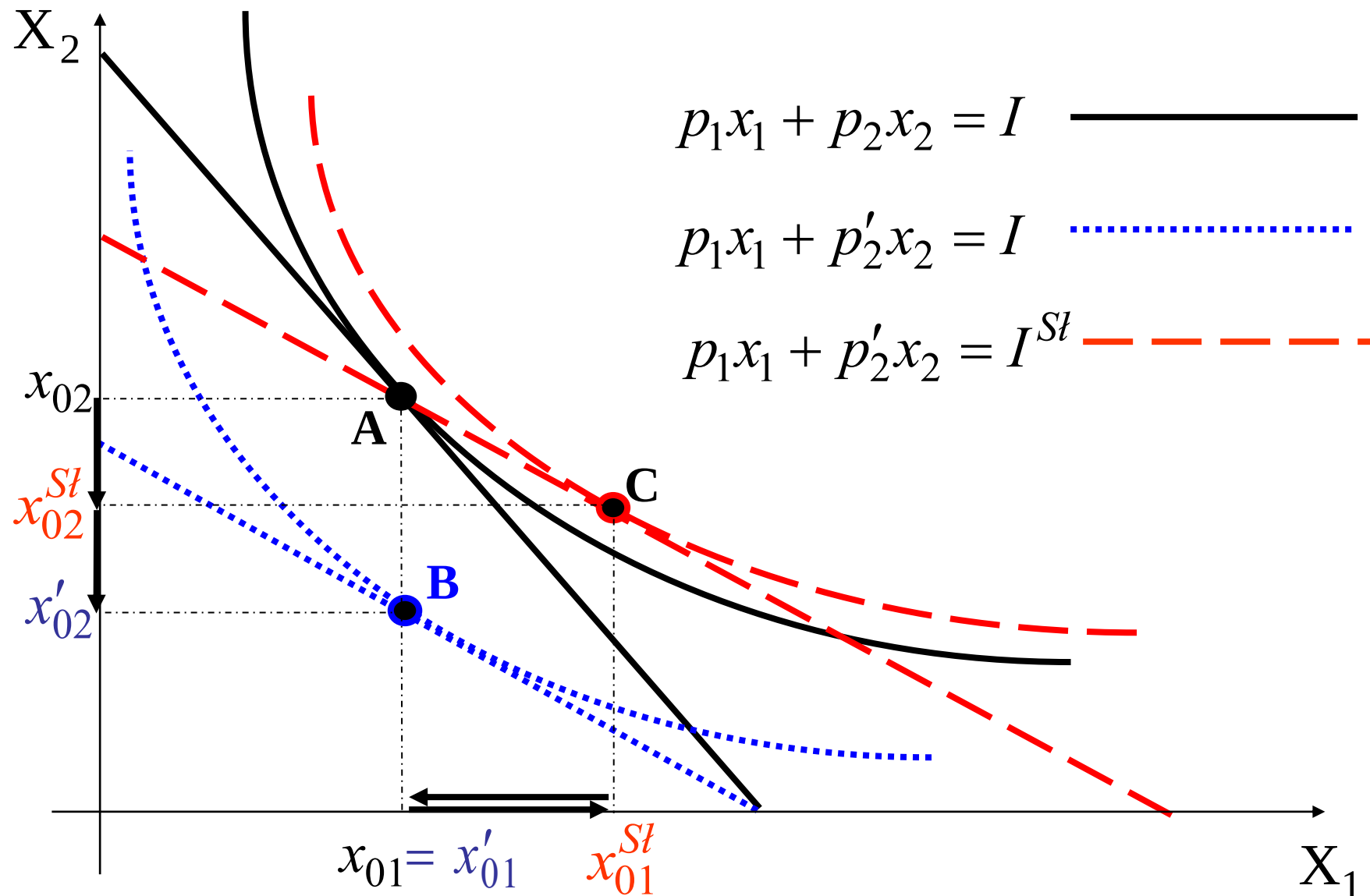
**Efekt substytucyjny
wg Slutskiego**

**Efekt
dochodowy**

gdzie
$$f_i^{Sl}(\mathbf{p}, \mathbf{x}_0) = \varphi_i\left(\mathbf{p}, \sum_{i=1}^n p_i x_{0i}\right)$$

Dochód kompensujący zmianę cen wg Slutskiego:

I^{Sl} – najmniejszy dochód pozwalający na zakup początkowego koszyka po zmianie cen.



Całkowita zmiana popytu na i -ty towar ($i=1,2$):

$$\Delta\varphi_i = \varphi_i(p_1, p'_2, I) - \varphi_i(p_1, p_2, I)$$

Efekt substytucyjny i -tego towaru ($i=1,2$) wg Słuckiego:

$$\Delta\varphi_i^s = \varphi_i(p_1, p'_2, I^{Sl}) - \varphi_i(p_1, p_2, I)$$

Efekt dochodowy na i -ty towar ($i=1,2$) wg Słuckiego:

$$\Delta\varphi_i^d = \varphi_i(p_1, p'_2, I) - \varphi_i(p_1, p'_2, I^{Sl})$$

Całkowita zmiana popytu z tytułu zmiany ceny przy stałym dochodzie jest sumą efektu substytucyjnego i dochodowego:

$$\Delta\varphi_i = \Delta\varphi_i^s + \Delta\varphi_i^d \quad (\text{tożsamość Słuckiego})$$